SÉRIE A, N° 4681
N° D'ORDRE : 5529

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Paul-Henri REBUT

PREMIÈRE THÈSE

Ondes dans les plasmas inhomogènes en géométrie cylindrique

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Amorçage de décharges dans les gaz par des ondes lumineuses intenses

Soutenues le 14 janvier 1966 devant la Commission d'examen

MM. YVON — Président

DELCROIX, DENISSE, TROCHERIS — Examinateurs

SÉRIE A, N° 4681
N° D'ORDRE : 5529

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Paul-Henri REBUT

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN

PREMIÈRE THÈSE

Ondes dans les plasmas inhomogènes en géométrie cylindrique

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Amorçage de décharges dans les gaz par des ondes lumineuses intenses

Soutenues le 14 janvier 1966 devant la Commission d'examen

MM. YVON — Président

DELCROIX, DENISSE, TROCHERIS — Examinateurs

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen

M. ZAMANSKY

Professeurs

MM.	BRELOT	T Analyse supérieure
	PRENANT	T anatomie et histologie comparée
	GRASSE	T évolution des êtres organisés
	PREVOST	T chimie organique
	WYART	T Minéralo. & cristallo
	TEISSIER	T zoologie
	MANGENOT	T biologie végé. (Orsay)
	AUGER	T physique quantique et relativité
	MONNIER	T physiologie générale
	PIVETEAU	T Paléontologie
	ROCARD	T physique ENS
	CARTAN	T mathématiques ENS
	LAFFITTE	T chimie générale
	N...	T géométrie supérieure
	COULOMB	T physique du globe
Mle	COUSIN	T biologie animale SPCN
MM.	CHRETIEN	T chimie minérale
	BOCQUET	T zoologie
	KASTLER	T physique ENS
	EPHRUSSI	T génétique
	RIVIERE	T géologie SPCN & sédiment. (Orsay)
	GAUTHERET	T biologie végétale PCB
	LUCAS R.	T recherches physiques
	THOMAS A.	T biologie cellulaire
	ARNULF	T optique appliquée
	MORAND	T physique enseignement
	SOLEILLET	T physique PCB
	FORTIER	T Mécanique exp. des fluides
	DRACH	T zoologie
	QUENEY	T météo. & dynamique atmos.
	GALLIEN	T embryologie
	EICHORN	T botanique
	DE CUGNAC	T biologie végétale SPCN
Mle	CAUCHOIS	T chimie physique
MM.	THELLIER	T physique du globe
	L'HERITIER	T biologie générale Orsay
	GRIVET	T radioélectricité Orsay
	PONCIN	T mécanique générale
	DU BREIL	T arith. & théorie des nombres
	QUELET	T chimie organique
	CAGNIARD	T géophysique appliquée
	CHAMPETIER	T chimie macromoléculaire
	CUVILLIER	T micropaléontologie
	JUNG	T géologie
	TRILLAT	T microscopie et diffrac. élec.
	WIEMANN	T chimie organ. & structu.
	JACQUINOT	T spectroscopie et physique céleste (Orsay)
	VASSY	T physique de l'atmosphère
	DESTOUCHES	T théorie physique
	AMIEL	T chimie générale
	HOCART	T minérall. & cristal.
	J.P. MATHIEU	T physique optique
	COUTEAUX	T cytologie
	MAY	T zoologie
	CHOQUET	T théorie des fonctions et topologie
	FELDMANN	T biologie végétale marine
	GUINIER	T physique des solides (Orsay)
	JOST	T physiologie comparée
	FORTET	T calcul des probabilités et physique mathématiques
	SCHWARTZ	T Calcul dif. & Intégral
	CHOUARD	T physiologie végétale
	MALAVARD	T aviation (technique aéron.)
	NORMANT	T synthèse organique
	BENARD	T chimie minérale
	BUVAT	T botanique ENS
	DUGUE	T statistique mathématiques
	SOULAIRAC	T Psychophysiologie
	ULRICH	T Physiologie végé-appli.
	MARECHAL	T Optique théo. & appli.
	KIRRMANN	T théories chimiques
	CHADEFAUD	T botanique
Mle	LE BRETON	T Physio de la nutrition
MM.	LELONG	T appli de l'ana à la géom.
	DEVILLERS	T anatomie & histo-compa.
	EHRESMANN	T topologie algébrique
	FRANCON	T physique SPCN
	GLANGEAUD	T géogra. phys. géol.
	DODEMENT	T mathématiques MGR
	PISOT	T technique math. de la physi.
	ROCH	T géologie
	SCHATZMANN	T astrophysique
	TERMIER	T géologie générale
	ZAMANSKY	T mathématiques générales
	LENNUIER	T Physique MGP
	RIZET	T génétique Orsay
	ROUTHIER	T géologie appliquée
Mme	TONNELAT	T physique théorique
MM.	DIXMIER	T mathématiques MPC
	SOUCHAY	T chimie générale
	AIGRAIN	T électrotechn. généé.
	BRUSSET	T chimie systématique
M.	LEVY	T physique théorique des hautes énergies (Orsay)
Mme	CHAIX	T chimie biologique
Mme	HUREL PY	T biologie végétale PCB
MM.	PANNETIER	T chimie générale
	BRUN	T mécanique des fluides I
	LEDERER	T chimie biologique (Orsay)
Mme	DUBREIL	T mathématiques (agréga)
Mme	LELONG	T math. II ENS
M.	BELLAIR	T géologie SPCN
MM.	COTTE	T physique électricité
	DUBOIS J.E.	T chimie organique
	LAMOTTE	T zoologie ENS
	MICHEL A.	T chimie minérale Orsay
	OLMER	T énergétique générale
	ROUAULT	T électricité (Orsay)
	GAUTHIER	T mécanique appliquée
	BARCHEWITZ	T chimie physique
	BROSSEL	T physique atomique
	BUSER	T physiologie comparée
	CAMUS	T physio-végé.
	CASTAING	T Physique II thermo-(Orsay)
	CURIEN	T minéralo. & cristal.
	MOYSE	T physio-végé. (Orsay)
Mme	CHARNIAUX-COTTON	T évolution des êtres organisés
MM.	POSSOMPES	T zoologie
	PULLMANN	T chimie quantique
	TEILLAC	T physique nuc-et radioactivité (Orsay)
	TONNELAT	T bio. physico-chim. (Orsay)
	VILLE	T économétrie
	WILLEMART	T chimie PCB
	DODE	T chimie (Orsay)
	FREYMANN	T recherches physiques
	GUINOCHET	T biolo. végé. SPCN (Orsay)
	ROLLET	T chimie minérale
Mle	JOSIEN	T chimie SPCN
MM.	CHEVALLEY	T géométrie algébrique et théorie des groupes
	ARNOULT	T électronique Orsay
	CHAPELLE	T physique I (Orsay)
	DELANGE	T mathématiques I (Orsay)
	DENY	T mathé-géné. (Orsay)
	GERMAIN	T mécanique théorique des fluides
	LUCAS	T géologie
	ALLARD	T chimie physique
	BERTHELOT	T physique des particules fondamentales (Orsay)
	BRICARD	T météor. et physique de l'atmosphère
Mme	ALBE FESSARD	T psycho. physio.
MM.	FRIEDEL	T physique des solides (Orsay)
	JULIA	T Etudes des molécules complexes
	LENDER	T biologie animale SPCN Orsay
	MAGAT	T physico-chimie des radio-éléments
Mle	QUINTIN	T électrochimie
MM.	MONOD	T chimie du métabolisme
	BENOIT	T physio. animale Orsay
	DE POSSEL	T analyse numérique
	CHARLOT	T chimie analytique
	LEMEE	T écologie végétale Orsay
	GUERIN	T chimie MPC Orsay
	CHATELET	T chimie PCB
	JEAN	T physio-nucléaire Orsay
	MATTLER	T physique SPCN
	BERGERARD	T zoologie Orsay
	BERTEIN	T électronique Orsay
	BOUISSIERES	T radiochimie
Mme	COUTURE	T thermo-et méca-physique
MM.	ELLEMBERGER	T géologie des grandes régions du globe (Orsay)
	FRANC	T biologie animale PCB
	SCHNELL	botanique tropicale
	STLKOWSKI	T physiologie végétale
	ACHER	T chimie biologique
	BAUDOIN	T biologie animale PCB
	BEAUMONT	biologie animale SPCN
	BLAMONT	géophysique ionosphère
	BOUREAU	T botanique
	CURIE D.	physique MGP
	DURAND DELGA	T géologie
	FREON	T chimie organique Orsay
	HELLER	T physiologie végétale
	TORTRAT	T calcul des probabilités
	CAILLEUX	T géologie SPCN
	MAGNAN	physique électricité
	DAUDEL	T mécanique ondulatoire appli. à la chimie théo. & à la phy. nucléaire
Mle	FOURCROY	biologie végétale SPCN
Mme	CHOQUET BRUHAT	mécanique analytique et méca. céleste
Mle	VEIL	T physiologie générale
MM.	LWOFF	T micobiologie
	SIESTRUNCK	T Méca. phys. & experimentale
	LACOMBE	T métallurgie des métaux nucléaires (Orsay)
	BROCHARD	T physique PCB (Orsay)
	CABANNES	T mécanique générale
	LESIEUR	T math. I (Orsay)
	MAZET	T méca. géné. (Orsay)
	CAIRE	géogra. physique et géo dynami
	COMOLET	méca. des fluides
	CORABOEUF	T physio. animale (Orsay)
	DELLOUE	T physique de l'exosphère
	GORENFLOT	botanique II (Orsay)
	HOUILLON	biologie animale PCB
	JULLIEN J.	chimie SPCN (Orsay)
	MALGRANGE	T technique mathé. de la phys. Ors.
	OLIVIER	Antropologie
	NOZERAN	T botanique II (Orsay)
MM.	BLANC-LAPIERRE	T physique ENS (Orsay)
	CHEVAUGEON	T botanique (Orsay)
	KAHANE	T mathématiques (Orsay)
	SAMUEL	T math ENS féminines
	KOURGANOFF	T astronomie (Orsay)
	THIRY	T méca. céleste
	ABELES	physique SPCN
	AMAT	T physique PCB
	AUBOIN	T géologie
Mme	BENOIT-GUEUTAL	T physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
MM.	BOUGIS	Biologie marine Villefranche/mer
	BRUHAT	T math. MPC
	BRUNN	T géologie historique Orsay
	CHABBAL	T physique MGP (Orsay)
	DEHEUVELS	T math. propé.
	D'ESPAGNAT	T physique théorique (Orsay)
	FURON	T géologie SPCN
Mme	GANS	T génétique
MM.	GENEVES	biologie végétale PCB
	GUILBERT	physique CUS Orléans
	HUPE	T pétrographie
	HOLLANDE	T biolo. géné.
	LIONS	T analyse numérique
	MAITTE	T chimie PCB
	MEYER	physique propé.
	NICOLAS	géologie appliquée
	PANIGEL	biologie générale
	RAVIER	pétrographie
	ROSEAU	T méca. théorique des fluides
	ROUBINE	électronique
	SILBER	T chimie PCB
	UEBERSFELD	T électronique
	YVON	T théories physiques
	HERVE	T mathématiques
	NERON	T math. MPC (Orsay)
Mme	PECKER WIMEL	T astrophysique
MM.	BALKANSKY	physique MPC
	LE CORRE	T électricité
	DELCROIX	T physique théorique (Orsay)
	GOURDIN	physique théorique (Orsay) des hautes énergies
	LEHMANN	T phys-exp-des hautes énergies
	NATAF	T physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
	ECHALIER	biologie animale PCB
	BARRAUD	physiolo-cellulaire
	LIORET	physiologie végé-Orsay
	DARS	géologie structurale & géolo-appli.
	CAMEFORT	T botanique (agrégation)
	VICHNIEWSKY	T mécanique industrielle
	BLAQUIERE	électronique (Orsay)
	ARNOUS	T physique théorique
	TATIBOUET	chimie (CSU Orléans)
	MALLIAVIN	T math. propé. (Orsay)
	GAUDEMAR	chimie propé.
	PEREZ Y JORBA	physique Exp. des Hautes énergies (Orsay)
	DAVID	T chimie (agrégation Orsay)
	BROUSSE	T mécanique théorique
	ROSCH	T astronomie
	GUY	T physique expérimentale
	LAZARD	math MPC
	MOREL Pierre	physique MPC
	ARSAC	programmation
	LEFEBVRE	chimie MPC
	CHAPEVILLE	biochimie
	BENOIT	physique CPEM
	RIO	chimie CPEM
	JAUZEIN	géologie ENS
	PREVOST Georges	BV CPEM
	FAVARD P.	BA CPEM
	VILKAS	chimie CPEM
Mle	FICINI	chimie CPEM
MM.	LEQUEUX	astronomie
	COHEN	physique MPC
	TAVERNIER	physique CPEM
Mme	ROIZEN	physique CPEM
MM.	DURAND M.	BA SPCN
	PASCAUD	physiologie
Mme	PETIT	BA CPEM
MM.	BROUSSE	géologie orsay
	CAGNIAC	physique agrégation Orsay
	LEBERRE	zoologie (Orsay)
	SCHEFFER	microbiologie (Orsay)
	de GENNES	physique des solides (Orsay)
	RIOU	physique nuclé. exp. Orsay -
	CLAUSER	chimie biolo. Orsay
	CHEVALIER	physio-animale Orsay
	JANCOVICI	physique atomique Orsay
	FALK-VAIRANT	physique nucléaire Orsay
	FETIZON	chimie propé. Orsay
	CERF	mathématiques Orsay
	LURCAT	physique
	RIGAUDY	chimie S.P.C.N.
	SIGWALT	chimie S.P.C.N.
	FOURNET	électricité générale
	COLLONGUES	chimie C.P.E.N.
	DUBERT	biochimie
	LAVOREL	biologie physico-chimique
	MOREL F.	physiologie comparée
	TALBOT	génétique chimique
Mme	NOUGAREDE	botanique
MM.	FRANCOIS	zoologie
	IVANOFF	océanographie physique
	CADIOT	chimie organique
	BARUCH	physique propédeutique
	NOZIERES	physique générale
	BOK	physique propédeutique
	SLONIMSKI	génétique

le secrétaire général

R. POULAIN

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été faite à la Section Autonome de Théorie des Gaz Ionisés du Commissariat à l'Energie Atomique dans le Cadre de l'Association EURATOM-CEA sur la Fusion, et je remercie Monsieur le Haut Commissaire F. PERRIN de l'avoir autorisée.

Je remercie plus particulièrement Monsieur le Professeur YVON, Monsieur le Professeur DELCROIX, Monsieur DENISSE et Monsieur TROCHERIS, pour l'intérêt avec lequel ils ont suivi ce travail et pour toutes les améliorations qu'ils m'ont suggérées.

J'exprime aussi mes remerciements à Messieurs TOROSSIAN, ADAM, PERULLI et LAFLEUR pour avoir bien voulu refaire certains calculs, relire et corriger cette thèse.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545810_0003

TABLE DES MATIÈRES

Pages

TABLE DES MATIERES 5

INTRODUCTION ET RESUME 7

I - EXPOSE GENERAL 9

A - Mouvement individuel et équilibre en géométrie cylindrique et statique 9

B - Méthode de perturbation pour l'équation de Vlasov. Cas des champs électromagnétiques 11

C - Tenseur de conductivité d'un plasma chaud et inhomogène. Résonances particulaires 12

D - Equation d'onde dans le cas d'un plasma froid. Résonances collectives 13

II - MOUVEMENT INDIVIDUEL ET EQUILIBRE EN GEOMETRIE CYLINDRIQUE 17

A - Mouvement individuel dans le cas d'une géométrie cylindrique statique 17

1 - Equations générales du mouvement d'une particule dans un champ électromagnétique 17

2 - Cas de la géométrie cylindrique statique 19

B - Etats stationnaires d'un plasma sans collision dans une géométrie cylindrique de révolution 22

1 - Cas général 22

2 - Etude de certaines fonctions de distribution 23

3 - Cas où il y a deux types de particules de charges de signes opposés 24

4 - Résumé des hypothèses et validité du modèle 25

C - Résultats numériques et confrontation expérimentale 25

1 - Intégration des équations 25

2 - Résultats expérimentaux obtenus dans des géométries cylindriques sans conducteur axial 27

3 - Courbes obtenues par l'intégration numérique du système différentiel 27

4 - Conclusion 30

D - Appendice 1 30

Pages

III - METHODE DE PERTURBATION POUR L'EQUATION DE VLASOV. CAS DES CHAMPS ELECTROMAGNETIQUES 33

A - Méthode de perturbation à tous les ordres de l'équation de Vlasov 33

1 - Changement de variables 33

2 - Trajectoires dans le nouvel espace des phases 34

3 - Intégration de l'équation de Vlasov 35

B - Linéarisation - Cas des petites perturbations 36

IV - TENSEUR DE CONDUCTIVITE D'UN PLASMA CHAUD ET INHOMOGENE. RESONANCES PARTICULAIRES 39

A - Calcul général du tenseur de conductibilité 39

1 - Etablissement des équations 39

2 - Etude de la fonction de distribution au voisinage d'une résonance 45

3 - Calcul de l'énergie absorbée par le milieu (ou émise) 46

B - Application au cas des petits rayons de Larmor 48

C - Conclusion 52

V - ONDES DANS UN PLASMA INHOMOGENE FROID -RESONANCES COLLECTIVES 53

A - Introduction 53

B - Equations de base 53

C - Calcul du courant et équation d'onde 54

D - Caractéristiques principales des équations d'ondes 58

1 - Etude des équations au voisinage de $r = 0$ 59

2 - Etude au voisinage du pôle $v_c = 0$ 59

3 - Etude au voisinage du pôle $U = 0$ 59

4 - Etude au voisinage du pôle $I = 0$ 60

5 - Solution dans le cas où $\omega = 0$ 60

6 - Solution dans le cas où $\omega \geqslant \omega_{ci}$ 61

7 - Surface de réflexion 61

E - Cas des ondes croissantes, résonances collectives 61

1 - Etude détaillée du franchissement des pôles I et U 63

2 - Calcul du vecteur de Poynting 65

F - Conclusions 67

VI - LISTE DES SYMBOLES UTILISES 69

VII - REFERENCES 71

INTRODUCTION ET RÉSUMÉ

La plupart des plasmas expérimentaux possèdent une propriété commune : l'inhomogénéité, et il semble difficile de concevoir une expérience portant sur un plasma homogène.

La haute température du plasma implique qu'il ne doit pas être en contact avec une paroi matérielle. De là résulte un fort gradient de densité ou de température dans une zone intérieure au récipient expérimental. Or cette inhomogénéité joue un rôle prépondérant dans la stabilité et modifie les possibilités de chauffage du plasma.

L'une des principales difficultés rencontrées dans les recherches sur la fusion contrôlée est cette nécessité d'obtenir un plasma confiné (donc inhomogène) et stable , à une haute température. L'étude des ondes dans un plasma inhomogène répond à la question de la stabilité et partiellement à celle du chauffage ; on peut évoquer d'autres possibilités de chauffage : effets non linéaires conduisant à des ondes de choc, injection de particules énergiques etc, mais une des voies qui semble porter beaucoup d'espoir consiste à passer par l'intermédiaire d'ondes.

La géométrie cylindrique de révolution a été choisie pour sa simplicité et parce qu'elle représente assez bien toute une classe d'expériences : les diverses expériences de striction, les expériences de faisceaux, etc.. Jusqu'à présent ce problème des ondes dans un plasma inhomogène n'a été traité que de manière partielle et le plus souvent en se plaçant dans l'hypothèse d'une faible inhomogénéité.

Le problème de la stabilité se rattache au problème des ondes par le fait qu'un plasma sera stable s'il n'existe pas d'ondes spontanément croissantes. La recherche des ondes croissantes permettra donc de conclure à la stabilité ou à l'instabilité d'un équilibre donné. Cette recherche indiquera de plus le taux de croissance des instabilités.

En général deux aspects de la stabilité des plasmas ont été traités :

- les instabilités liées à l'inhomogénéité, traitées à partir d'équations macroscopiques plus ou moins parfaites (magnétohydrodynamique) ne tenant pas compte du mouvement particulaire et des fréquences qui lui sont liées.

- Les instabilités liées à l'anisotropie, qui font intervenir l'analyse détaillée des fonctions de distribution et du mouvement individuel. Ces instabilités sont obtenues à partir de l'étude de l'équation de Vlasov en milieu homogène.

Une étude d'onde en milieu faiblement inhomogène (et d'instabilité) utilisant des développements limités commence à faire la jonction de ces deux points de vue.

Par contre dans ce travail on s'affranchira de l'hypothèse d'une faible inhomogénéité et les résultats resteront valables pour des plasmas fortement inhomogènes. On calculera le tenseur de conductivité du plasma à partir de l'équation de Vlasov sans approximations fondamentales et on montrera certaines propriétés générales de ce tenseur.

On n'appliquera pas dans cette thèse les résultats obtenus au calcul de la stabilité de certains équilibres particuliers, étude qui sera faite ensuite directement à partir du tenseur de conductivité [14], mais on montrera la généralité de l'absorption résonnante des particules (effet Landau).

On montrera aussi qu'il existe dans un plasma froid (sans absorption Landau) une possibilité d'absorption de l'onde due à une couche résonnante (résonance collective). Effet Landau ou résonance particulaire, absorption anormale ou résonance collective se présentent sous un aspect mathématique analogue. On conçoit que l'espace des positions et l'espace des vitesses présentent une certaine symétrie vis-à-vis des propriétés physiques ; par le mouvement particulaire qui se place dans l'espace des phases on ne peut séparer l'un de l'autre (les intégrales premières font intervenir simultanément positions et vitesses).

On commencera par mettre en évidence les propriétés du mouvement particulaire à l'équilibre et par préciser quelques types de fonctions de distribution possibles pour le plasma.

Ensuite viendra la mise au point d'une méthode de perturbation dans l'espace des intégrales premières, puis son application au cas particulier des ondes électromagnétiques. On définira un opérateur tensoriel de conductivité dont on pourra séparer les parties hermitique et anti-hermitique, l'une d'elles correspondant à un transfert d'énergie entre l'onde et les particules, transfert dû aux particules résonnantes.

Dans le cas d'un plasma froid (vitesses thermiques négligeables) le tenseur de conductibilité se réduit à celui bien connu des plasmas homogènes et froids, mais la variation de toutes les grandeurs physiques avec le rayon introduit de nouvelles complications. On peut obtenir pour les ondes "basse fréquence" l'équation d'onde régissant l'amplitude du champ électrique ou magnétique. Le caractère essentiel de cette équation est d'être en général singulière ; ces singularités traduisent la présence de couches résonnantes qui conduiront à une absorption anormale analogue à l'absorption Landau due aux particules résonnantes.

Mais afin de faciliter la lecture plutôt aride de cet ensemble complexe de calculs et de dégager les points principaux, on présentera dans une première partie l'ensemble des calculs sans approfondir le détail des démonstrations pour lesquelles on pourra se reporter aux quatre parties suivantes .

I - EXPOSÉ GÉNÉRAL

Les équations de Vlasov serviront de base de départ à tout ce travail. Les équations de Vlasov expriment uniquement la conservation des particules lors de leur mouvement en ne supposant aucune autre interaction que celle décrite par les champs électriques et magnétiques macroscopiques. Cette description peut d'ailleurs être complète pour un plasma dans la mesure où l'on tient compte de phénomènes non linéaires et de la complexité des champs électromagnétiques. On se bornera ici à un traitement linéaire des ondes.

L'équation de Vlasov s'écrit

$$\frac{df}{dt} = 0 \qquad (1)\text{-I}$$

où f est la fonction de distribution des particules et $\frac{d}{dt}$ représente la dérivation par rapport au temps t le long d'une trajectoire dans l'espace des phases.

La solution d'une telle équation aux dérivées partielles est donnée par une fonction arbitraire de six intégrales premières du mouvement particulaire. On voit donc ici l'importance de l'étude des trajectoires individuelles pour la résolution de ce problème.

A - MOUVEMENT INDIVIDUEL ET EQUILIBRE EN GEOMETRIE CYLINDRIQUE STATIQUE (Partie II)

On sait qu'il existe un hamiltonien H pour le mouvement d'une particule chargée soumise à des forces électromagnétiques :

$$H = \frac{1}{2M}\left[(P_r - q A_r)^2 + \left(\frac{P_\theta}{r} - q A_\theta\right)^2 + (P_z - q A_z)^2\right] + q\Phi \qquad (2)\text{-I}$$

avec

$$\left.\begin{aligned} P_r &= M w_r + q A_r \\ P_\theta &= r M w_\theta + q r A_\theta \\ P_z &= M w_z + q A_z \end{aligned}\right\} \qquad (3)\text{-I}$$

d'où

$$H = \frac{1}{2} M \bar{w}^2 + q\Phi$$

équations dans lesquelles M est la masse d'une particule de charge q et de vitesse $\bar{w}$, les P_i (i= r, θ, z) sont les moments conjugués des coordonnées cylindriques r, θ et z, $\bar{A}$ est le potentiel vecteur lié au champ magnétique $\bar{B}$, et Φ le potentiel électrique, A et Φ pouvant dépendre de r, θ, z et t.

On peut choisir la jauge de $\bar{A}$ de façon à annuler $A_r^{(*)}$: $A_r = 0$.

Dans le cas de l'équilibre de géométrie cylindrique $\bar{A}$ et Φ sont des fonctions qui ne dépendent que du rayon. Il s'ensuit que l'Hamiltonien est indépendant des variables t, θ et z, d'où l'existence de trois intégrales premières immédiates :

(*) $\nabla.\bar{A} = 0$ pour l'équilibre .

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \longrightarrow H = H_o$$

$$-\frac{dP_\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \longrightarrow P_\theta = P_{\theta_o} \qquad (4)\text{-I}$$

$$-\frac{dP_z}{dt} = \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \longrightarrow P_z = P_{zo}$$

Ce qui traduit la conservation de l'énergie et de deux des moments de la particule.

Les trois équations précédentes ne font intervenir que les variables w_r, w_θ, w_z et r. On peut donc éliminer w_θ et w_z de $H = H_o$ et obtenir

$$w_r^2 = \zeta\ (H_o,\ P_{\theta o},\ P_{zo},\ r) \qquad (5)\text{-I ou } (13)\text{-II}$$

et, en utilisant la définition de la vitesse

$$w_r = \frac{dr}{dt}$$

$$t_o = t - \int_{r_o}^{r} \frac{dr'}{\pm\sqrt{\zeta(H_o,\ P_{\theta_o},\ P_{zo}, r')}} \equiv T \qquad (6)\text{-I ou } (15)\text{-II}$$

soit $T = t_o$. T est une nouvelle intégrale première (phase).

On remarquera aussi que l'équation conduit à une dépendance périodique de r en fonction du temps :

$$r = \sum_{n'} a_{n'}\ e^{i n' \omega_c\ (t - t_o)} \qquad (18)\text{-II}$$

dont la fréquence fondamentale sera la fréquence cyclotronique ω_c

$$\frac{2\pi}{\omega_c} = \oint_{r_o}^{r_o} \frac{dr'}{\pm\sqrt{\zeta\ (r')}} \qquad (7)\text{-I ou } (16)\text{-II}$$

Les intégrations des deux autres composantes de la vitesse fourniront les 2 intégrales premières manquantes Θ, Z (pour définir complètement la trajectoire, il en faut six) et définiront 2 autres fréquences fondamentales du mouvement particulaire :

$$\omega_r = \omega_c \oint \frac{dr'\ [P_{\theta_o} - q\, r' A_\theta\ (r')]}{\pm\sqrt{\zeta\ (r')}\ M\, r'^2} \qquad (8)\text{-I}$$

$$\nu = \omega_c \oint \frac{dr'\ [P_{zo} - q\, A_z(r')]}{\pm\sqrt{\zeta\ (r')}\ M} \qquad (9)\text{-I ou } (17)\text{-II}$$

ω_r est la fréquence de rotation autour de l'axe géométrique et ν la vitesse moyenne de la particule le long de cet axe.

Ces deux vitesses contiennent la vitesse de dérive de la particule (voir partie II).

On pourra inverser les intégrales premières Θ et Z et écrire

$$\theta = \theta_o + \omega_r\ (t - t_o) + \sum_{n'} \theta_{n'}\ \exp\ in'\omega_c\ (t - t_o) \qquad (10)\text{-I ou } (18)\text{-II}$$

$$z = z_o + \nu\ (t - t_o) + \sum_{n'} z_{n'}\ \exp\ in'\omega_c\ (t - t_o)$$

L'intégrale T dépend explicitement du temps t et les intégrales premières Θ et Z de θ et $z - .$ Une fonction de distribution à l'équilibre f_o ne devant pas dépendre des trois variables t, θ et z ne dépendra donc pas des 3 intégrales premières T, Θ et Z et sera une fonction de H, P_θ et P_z

Un cas particulier intéressant sera celui où la fonction de distribution est isotrope autour d'une vitesse macroscopique moyenne $\overline{V}$

$$f_o = f_o \left[(\overline{w} - \overline{V})^2, \ \overline{r} \right]$$

Cette contrainte impose un choix particulier pour f_o (H, P_θ, P_z) :

$$f_o (H, P_\theta, P_z) = g (H - \Omega P_\theta - V_z P_z) \qquad \text{(12)-I ou (29)-II}$$

g étant une fonction d'une seule variable, et Ω et V_z des constantes.

La vitesse macroscopique est dans ce cas celle d'un solide se translatant et tournant autour de l'axe du système.

$$\overline{V} = \Omega r \, \overline{e}_\theta + V_z \, \overline{e}_z \qquad \text{(13)-I ou (30)-II}$$

En choisissant pour g une fonction exponentielle (distribution maxwellienne) on pourra calculer un certain nombre d'équilibres représentant assez bien une distribution expérimentale.

B - METHODE DE PERTURBATION POUR L'EQUATION DE VLASOV - CAS DES CHAMPS ELECTROMAGNETIQUES (Partie III).

Connaissant le mouvement particulaire dans un champ statique, il convient maintenant de calculer la perturbation que subit ce mouvement lorsque l'on modifie le champ de force agissant sur les particules. On sera donc en mesure d'obtenir les nouvelles intégrales premières (conditions initiales exprimées en fonction des coordonnées actuelles par exemple), puis la nouvelle fonction de distribution.

La connaissance de cette fonction de distribution permettra le calcul des nouvelles grandeurs macroscopiques.

On regardera en détail le cas où la perturbation du champ de force est une onde électromagnétique de faible amplitude (linéarisation possible).

Au lieu de se placer dans l'espace des phases normal $(\overline{r}, \overline{w})$ pour réaliser ce calcul, on se placera dans un nouvel espace des phases obtenu par le changement de variables donné par les 6 intégrales premières H, P_θ, P_z, T, Θ, Z, le temps restant la variable de description.

Dans ce nouveau système, conditions initiales ou trajectoires non perturbées se confondent : la trajectoire non perturbée est représentée par un point fixe.

Il est facile de voir que le théorème de Liouville s'applique à ce nouvel espace des phases : soit $\overline{N}$ un point de cet espace (H, P_θ, P_z, T, Θ, Z). On sait que le jacobien de la transformation $(\overline{r}, \overline{w}) \longrightarrow \overline{N}$ est constant et égal à M^{-3}. La conservation du jacobien dans l'espace $\overline{r}$, $\overline{w}$ lorsque les particules décrivent des trajectoires, entraîne donc la conservation du jacobien dans l'espace $\overline{N}$, ce qui est le théorème de Liouville.

Une fonction de distribution sera donc une fonction de 6 intégrales premières dans $\overline{N}$ (les conditions initiales $\overline{N}_o$ $(\overline{N}, t)$ par exemple)

$$f (\overline{N}, t) = f_o \left[\overline{N}_o (\overline{N}, t) \right] \qquad \text{(14)-I}$$

si la trajectoire est définie par $\overline{N} = \overline{N} (\overline{N}_o, t) \equiv \overline{N}_o + \Delta \overline{N}$

Δ représentant une variation sous l'effet de la force perturbatrice $\overline{F}_1$, on obtient

$$f (\overline{N}) = f_o (\overline{N} - \Delta \overline{N}) \qquad \text{(15)-I ou (13)-III}$$

et si $\Delta \overline{N}$ est petit on aura donc au premier ordre

$$f (\overline{N}) = f_o (\overline{N}) - \frac{\partial f}{\partial \overline{N}} \cdot \Delta \overline{N} \qquad \text{(16)-I ou (14)-III}$$

Si on définit la perturbation de la fonction de distribution par $f_1 (\overline{N})$ on aura donc au premier ordre

$$f_1 (\overline{N}) = - \frac{\partial f_o}{\partial \overline{N}} \cdot \Delta \overline{N} \qquad \text{(17)-I}$$

en utilisant la définition $\Delta \dot{N}$ on calcule que Δ est l'opérateur

$$\Delta = \int_{t_o}^{t} dt' \frac{F_1}{M} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \qquad (18)\text{-I}$$

c'est-à-dire l'intégration de l'effet perturbateur le long de la trajectoire $\mathfrak{T}$ de la particule. On peut au premier ordre remplacer la trajectoire réelle de la particule par la trajectoire non perturbée $\mathfrak{T}_o$.

Si f_o ne dépend que de H, P_θ et P_z les seuls calculs porteront sur ΔH, ΔP_θ, ΔP_z. Dans le cas d'une onde électromagnétique perturbatrice définie par un champ électrique

$$\bar{E}(r)\, e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \equiv \bar{E}_1$$

et un champ magnétique

$$\bar{B}(r)\, e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \equiv \bar{B}_1$$

On obtiendra les liaisons suivantes entre ΔH, ΔP_θ et ΔP_z

$$\Delta P_\theta = q\left[\frac{r E_{1\theta}}{i\omega}\right]_{t_o}^{t} - \frac{m}{\omega}\Delta H$$

$$\Delta P_z = q\left[\frac{E_{1z}}{i\omega}\right]_{t_o}^{t} - \frac{k}{\omega}\Delta H \qquad \begin{matrix}(19)\text{-I} \\ \text{ou} \\ (10)\text{-III}\end{matrix}$$

relation qui représente une collision entre une onde et une particule avec conservation de l'énergie totale et des moments azimutaux et longitudinaux totaux. Les relations (19)-I reportées dans l'équation (17)-I permettent d'écrire pour $f_1(\bar{N})$

$$f_1(\bar{w}, \bar{r}) = -\left[\frac{\partial f_o}{\partial H} + \frac{m}{\omega}\frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} - \frac{k}{\omega}\frac{\partial f_o}{\partial P_z}\right]\int_{t_o}^{t} q\,(\bar{w}_1 \cdot \bar{E})\, dt' - \frac{q}{i\omega}\left[r E_{1\theta}\frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} + E_{1z}\frac{\partial f_o}{\partial P_z}\right]_{t_o}^{t} \qquad \begin{matrix}(20)\text{-I} \\ \text{ou} \\ (22)\text{-III}\end{matrix}$$

formule de base qui permettra le calcul explicite du tenseur de conductivité : le calcul à faire sera essentiellement celui de ΔH c'est-à-dire de $\int_{t_o}^{t} q\,(\bar{w} \cdot \bar{E})\, dt'$.

On pourra alors calculer les courants $\bar{J}$ ou le tenseur de conductivité $\bar{\bar{\sigma}}$:

$$\bar{J}_1 = \int q\, \bar{w}\, f_1(\bar{w}, \bar{r})\, d^3w \equiv \bar{\bar{\sigma}}\, \bar{E}_1 \qquad (21)\text{-I}$$

C - TENSEUR DE CONDUCTIVITE D'UN PLASMA CHAUD ET INHOMOGENE - RESONANCES PARTICULAIRES (partie IV).

Le calcul de ΔH ne présente pas de difficultées particulières ; afin de pouvoir négliger les conditions initiales à t_o, on se bornera à considérer des ondes croissantes (pouvant être très faiblement croissantes). On remarquera que les collisions peuvent jouer un rôle analogue à celui des ondes croissantes en amortissant les oscillations libres liées à un choix particulier de conditions initiales.

On aura une résonance particulaire lorsque la fréquence de l'onde sera égale à une combinaison des fréquences fondamentales du mouvement individuel. Dans ce cas l'énergie ΔH croîtra linéairement avec le temps (au premier ordre).

En effet on trouvera

$$\Delta H = e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \sum_n A_n \frac{1 - e^{i(\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)(t - t_o)}}{i\,(\omega + n\,\omega_c + m\,\omega_r + k\,\nu)} \qquad (22)\text{-I ou } (10)\text{-IV}$$

les résonances ayant lieu pour

$$-\omega = n\omega_c + m\omega_r + kv \qquad \text{(23)-I ou (12)-IV}$$

A_n est un coefficient représentant le taux d'harmonique n de la puissance vue par la particule:

$$A_n = \frac{\omega_c}{2\pi} \oint q\ \bar{w}.\ \bar{E}(r)\ e^{i[\ldots - n\omega_c(t'-t)]}\ dt' \qquad \text{(24)-I ou (11)-IV}$$

On montrera que l'énergie $\mathcal{E}$ absorbée par le milieu correspond aux particules résonantes (effet Landau). Pour cela on utilisera la définition de $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \int_{t_o}^{t} dt \int_V \bar{E}_1 \ .\ \bar{J}_1\ d^3r :$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4} \int_{Vol.} d^3r \int_{t_o}^{t} dt' \ldots \bar{E}_1^* \ .\ J_1 + \bar{E}_1 \ .\ J_1^* \qquad \text{(25)-I ou (27)-IV}$$

$$= \frac{1}{4} \int_{Vol.} d^3r \int_{t_o}^{t} dt \int_{\infty}^{+\infty} d^3w\ \{q\,(\bar{E}_1^* \ .\ \bar{w})\ f_1 + \text{comp. conj}\}.$$

On reconnait un groupement analogue à celui qui a donné ΔH: $q\bar{E}_1^* . \bar{w}$ précédé par une intégration sur le temps.

On décompose f_1 en deux termes : l'un contenant ΔH et l'autre ne le contenant pas ; ce dernier terme ne donne pas à $\mathcal{E}$ de contribution dépendant du temps dans la mesure où ω est réel.

Par contre le terme correspondant à

$$-\left[\frac{\partial f_o}{\partial H} - \frac{m}{\omega}\frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} - \frac{k}{\omega}\frac{\partial f_o}{\partial P_z}\right] \Delta H \qquad \text{(26)-I}$$

permettra après intégration par partie et passage des variables d'Euler à celles de Lagrange d'écrire :

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{4}\int d^3r\, d^3w\ \Delta H\ \Delta H^*\left(\frac{\partial f_o}{\partial H} - \frac{m}{\omega}\frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} - \frac{k}{\omega}\frac{\partial f_o}{\partial P_z}\right) + \mathcal{E}_o \qquad \text{(27)-I ou (32)-IV}$$

or $\mathcal{E} - \mathcal{E}_o$ varie proportionnellement au temps : cela correspond à l'énergie absorbée ou émise par les particules résonnantes : l'effet Landau.

La puissance correspondante, si l'on regarde son comportement asymptotique, est donnée par

$$P_u = -\frac{1}{2}\int d^3r\, d^3w \sum_n A_n A_n^*\, \delta\ (\omega + n\omega_c + m\omega_r + kv)\left[\frac{\partial f_o}{\partial H} - \frac{m}{\omega}\frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} - \frac{k}{\omega}\frac{\partial f_o}{\partial P_z}\right]$$

Dans le cas d'un plasma où les rayons de Larmor sont petits vis à vis des gradients on peut faire le calcul complet des intégrales A_n et obtenir un tenseur de conductivité ; ce tenseur de conductivité redonne dans le cas homogène le tenseur de conductivité bien connu (7) (Plasma chaud en géométrie homogène).

D - EQUATION D'ONDE DANS LE CAS D'UN PLASMA FROID.RESONANCES COLLECTIVES (partie V)

Dans le cas d'un plasma froid les effets de l'inhomogénéité disparaissent du mouvement particulaire, les particules ayant une position statique à l'équilibre.

Il s'ensuit que le tenseur de conductivité local est le même que celui des plasmas froids et homogènes.

Mais les modes propres et leur propriétés peuvent changer fortement. Les ondes se propageront dans un milieu d'indice tensoriel variable : on aura des reflexions totales avec effet tunnel et des absorptions anormales dues à la présence de couches résonnantes qui conduiront à une absorption équivalente à l'effet Landau. Physiquement cette absorption est de même nature que

l'absorption acoustique due à une couche limite dans un écoulement hydrodynamique : l'indice variable assure une focalisation de l'onde dans une certaine couche, focalisation entraînant une forte densité d'énergie qui peut être dissipée par une faible résistivité, ou absorbée grâce à des effets non linéaires, ou couplée avec un autre type d'onde.

Les équations de départ seront soit celles du mouvement particulaire d'une assemblée sans vitesse thermique, soit le tenseur de conductivité d'un plasma froid dans lequel il y a des courants parallèles au champ magnétique.

On définira les vecteurs unitaires suivants :

$\bar{e}_r$ vecteur radial

$\bar{e}_b$ vecteur porté par le champ magnétique $\bar{B}_o$ (à l'équilibre)

$\bar{e}_c$ vecteur normal aux deux précédents $\bar{e}_c = \bar{e}_r \times \bar{e}_b$

On obtient après intégration de l'équation du mouvement

$$M \frac{d\bar{w}}{dt} = q \left[E_1 + (\bar{w} + \bar{V}) \times \bar{B}_1 + \bar{w} \times \bar{B}_o \right] \qquad \text{(29)-I ou (1)-V}$$

$\bar{V}$ étant une vitesse macroscopique portée par le champ magnétique à l'équilibre $\bar{B}_o$

$$4\pi c^2 i\, J_{1bj} = \sum_j \left[\frac{\omega_{Pj}^2}{\omega_j} E_{1b} + 4\pi i \frac{n_{j1}}{n_o} J_{jo}\, c^2 \right] \qquad \text{(30)-I ou (11)-V}$$

$$4\pi c^2 i\, J_{1rj} = \sum_j \left[\frac{\omega_{Pj}^2\ \omega_j}{\omega_j^2 - \omega_{cj}^2} (E_{1r} + V_j\ B_{1c}) + \frac{i\omega_{Pj}^2\ \omega_{cj}}{\omega_j^2 - \omega_{cj}^2} (E_{1c} - V_j\ B_{1r}) \right]$$

$$4\pi c^2 i\, J_{1cj} = \sum_j \left[\frac{\omega_{Pj}^2\ \omega_j}{\omega_j^2 - \omega_{cj}^2} (E_{1c} - V_j\ B_{1r}) - \frac{i\omega_{Pj}^2\ \omega_{cj}}{\omega_j^2 - \omega_{cj}^2} (E_{1r} + V_j\ B_{1c}) \right]$$

équation dans laquelle l'indice j est lié à l'espèce j avec

$$\omega_j = \omega + \frac{m}{r} V_\theta + k V_z \equiv \omega + k_b V_j$$

En ajoutant aux équations (30)-I les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} i\omega \bar{B}_1 = - \nabla \times \bar{E}_1 \\ \nabla \times \bar{B}_1 = 4\pi \bar{J}_1 + \dfrac{i\omega \bar{E}_1}{c^2} \end{cases}$$

on forme un système d'équations complet que l'on peut résoudre.

Pour cela on posera

$$\bar{B}_1 = \frac{\bar{v}}{v^2} \times \nabla \psi + \frac{\dot{\bar{v}}}{v^2} \varphi$$

équation dans laquelle ψ et φ sont deux fonctions scalaires définissant $\bar{B}_1$ et telles que :

$$\nabla \cdot \bar{B}_1 = 0$$

$\bar{v}$ est le vecteur $m\bar{e}_z - kr\bar{e}_\theta$.

On fera aussi l'hypothèse d'une onde dont la fréquence est basse vis à vis de la fréquence plasma ou plus exactement l'hypothèse de l'inertie négligeable des électrons pour les ondes considérées.

Cette hypothèse revient à dire que dans l'équation (30)-I le coefficient $\frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \longrightarrow \infty$; cette équation ne peut être résolue que si $E_b = 0$: le champ électrique perturbateur est nul le long des lignes de champ magnétique.

Dans ce cas le système se réduit à une équation d'onde sur ψ de la forme

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{rI}{U}\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi + G\,\psi = 0 \qquad \text{(32)-I ou (47)-V}$$

I, U et G étant des fonctions connues de r.

Cette équation peut être traitée par la méthode B.K.W. à l'exception d'un certain nombre de couches : celles où U = 0, I = 0, G = 0, r = 0.

G = 0 définira en général des surfaces de reflexion totale avec effet tunnel possible mais sans absorption anormale.

r = 0 est cité pour mémoire et correspond aux singularités des fonctions de Bessel.

I = 0 et U = 0 correspondent à un comportement singulier de la solution ψ : les solutions en ψ ont dans ce cas une singularité logarithmique.

I et U s'écrivent :

$$I = \frac{v_c^2\, c^2}{r^2} - \frac{\omega_{pi}^2\, \omega^2}{\omega_{ci}^2 - \omega^2}$$

$$U = \frac{v^2\, c^2}{r^2} - \frac{\omega_{pi}^2\, \omega^2}{\omega_{ci}^2 - \omega^2} \qquad \text{(33)-I}$$

I = 0 et U = 0 correspondent respectivement au rayon r pour lequel les caractéristiques globales de l'onde sont identiques au caractéristiques locales d'une onde d'Alfven qui se propagerait parallèlement au champ magnétique (pôle I), ou obliquement (pôle U).

On exprimera ce fait en disant qu'il y a résonance collective entre l'onde et le plasma aux rayons singuliers.

On considèrera maintenant le cas d'une onde croissante :

I et U dépendent de la fréquence ω et si celle-ci devient complexe les singulières disparaissent, les solutions restant voisines des solutions singulières (une résistivité donne le même résultat). On peut donc par ce biais franchir la "singularité" et obtenir les solutions physiques : on trouve que le coefficient de la petite solution subit une discontinuité au passage des couches résonnantes de l'équation (32)-I. Ce qui se traduira physiquement par une absorption ou une émission de la couche. Ce dernier caractère est facilement mis en évidence par le calcul du flux du vecteur de Poynting.

$$\phi = \frac{-1}{16\,\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{d}{dr}\left[r\,(E_{1c}\,B_{1b}^{*} + E_{1c}^{*}\,B_{1b})\right] 2\,\pi\,dr \qquad \text{(34)-I}$$

en particulier pour le pôle I dans la limite où ω devient réel

$$\phi = \frac{2\,\pi\,r_o}{8}\,\frac{|\omega|\left|\frac{\partial T}{\partial r}\right| r_o^2}{v_b^2\, v_c^2\, c^2}\,\psi_{20}\quad\psi_{20}^{*} \qquad \text{(35)-I ou (64)-V}$$

ψ_{20} étant le coefficient de la grande solution pour $r = r_o$

II - MOUVEMENTS INDIVIDUELS ET ÉQUILIBRE EN GÉOMÉTRIE CYLINDRIQUE ET STATIQUE

La fonction de distribution des particules dans l'espace des phases, f, sera obtenue par l'intégration de l'équation de Boltzmann en l'absence de collisions. Cette intégration peut être menée à bien dans le cas où il existe un ordre de symétrie assez élevé (le cas de la géométrie cylindrique ou plane).

L'équation de Boltzmann en l'absence de collisions (équation de Vlasov), peut s'écrire [1]

$$\frac{df}{dt} = 0 \qquad (1)\text{-II}$$

équations aux dérivées partielles signifiant que la fonction de distribution f est une constante du mouvement particulaire : la solution générale est une fonction arbitraire de six intégrales premières indépendantes définissant une trajectoire.

La partie A sera donc une analyse détaillée de la trajectoire d'une particule dans des champs magnétiques et électriques statiques ayant la géométrie cylindrique de révolution.

La partie B traitera de certaines fonctions de distribution isotropes et de leurs propriétés macroscopiques.

A - MOUVEMENT INDIVIDUEL DANS LE CAS D'UNE GEOMETRIE CYLINDRIQUE STATIQUE

1/ Equations générales du mouvement d'une particule dans un champ électromagnétique

Les équations de base seront les équations hamiltoniennes du mouvement d'une particule chargée non relativiste.

Soit H cet hamiltonien

$$H = \frac{1}{2M}\left[(P_r - q A_r)^2 + \left(\frac{P_\theta}{r} - q A_\theta\right)^2 + (P_z - q A_z)^2\right] + q\Phi \qquad (2)\text{-II}$$

M étant la masse de la particule

q sa charge

P_i (i = r, θ ou z) les moments généralisés liés aux coordonnées cylindriques r, θ et z ;

$\bar{w}$ sa vitesse

t le temps

Les unités choisies seront les unités électromagnétiques dans le système c.g.s. (u.e.m. c.g.s.)

$\bar{A}$ est un potentiel vecteur lié au champ magnétique $\bar{B}$

Φ le potentiel scalaire correspondant lié au champ électrique $\bar{E}$

Le potentiel vecteur $\bar{A}$ sera défini par les équations suivantes

$$\nabla \times \bar{A} = \bar{B} \qquad (3)\text{-II}$$

$$A_r = 0$$

ce qui donne après intégration

$$A_r = 0$$
$$A_\theta = \frac{1}{r}\int_o^r r' B_z \, dr' \qquad (4)\text{-II}$$
$$A_z = -\int_o^r B_\theta \, dr'$$

B_θ et B_z étant des fonctions de r', θ, z et t.

Le potentiel Φ est lié au potentiel $\bar{A}$ et au champ électrique $\bar{E}$ par la relation

$$\nabla\Phi = -\left(\frac{\partial\bar{A}}{\partial t} + \bar{E}\right) \qquad (5)\text{-II}$$

soit après intégration

$$\Phi = -\int_o^z E_z\,(r = 0,\ z',\ t)\, dz' - \int_o^r E_r\,(r', \theta, z, t)\, dr' \qquad (6)\text{-II}$$

Moyennant ces définitions l'hamiltonien et les moments généralisés s'écrivent :

$$H = \frac{1}{2} M \bar{w}^2 + q\Phi$$
$$P_r = M w_r \qquad (7)\text{-II}$$
$$P_\theta = M r w_\theta + q r A_\theta$$
$$P_z = M w_z + q A_z$$

La dérivée totale par rapport au temps d'une grandeur G s'écrit

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + [G, H] \qquad (8)\text{-II}$$

où [ ] est le crochet de Poisson ;
en particulier l'équation de Boltzmann sans second membre se met sous la forme

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0$$

La résolution de cette équation aux dérivées partielles revient à chercher les formes indépendantes F vérifiant $\frac{dF}{dt} = 0$. Toute fonction arbitraire de ces formes la vérifiera aussi.

L'équation (8), appliquée à l'hamiltonien H et aux moments P_θ et P_z s'écrit :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = q\frac{\partial\Phi}{\partial t} - q\,\bar{w}\cdot\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}$$
$$\frac{dP_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial\theta} = -q\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + q\,\bar{w}\cdot\frac{\partial\bar{A}}{\partial\theta} \qquad (9)\text{-II}$$
$$\frac{dP_z}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} = -q\frac{\partial\Phi}{\partial z} + q\,\bar{w}\cdot\frac{\partial\bar{A}}{\partial z}$$

Lorsqu'il existe deux relations de la forme 10-II pouvant provenir d'une symétrie des champs électriques et magnétiques

$$\frac{\partial\bar{A}}{\partial t} + \Omega\frac{\partial\bar{A}}{\partial\theta} + V_z\frac{\partial\bar{A}}{\partial z} = 0$$
$$\qquad (10)\text{-II}$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \Omega\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + V_z\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0$$

Ω et V_z étant des constantes, on obtient l'intégrale première suivante

$$-H + \Omega P_\theta + V_z P_z = \text{constante} \qquad (11)\text{-II}$$

Deux intégrales indépendantes de ce type seront utilisées dans le cas de la symétrie cylindrique. Ces intégrales permettent aussi l'étude de certaines déformations hélicoïdales.

2/ Cas de la géométrie cylindrique statique

En faisant les hypothèses supplémentaires d'une géométrie cylindrique statique et de révolution, les champs magnétiques et électriques deviennent uniquement fonction du rayon r et l'hamiltonien ne dépendra plus que de quatre variables : les trois composantes de la vitesse et le rayon.

Dans ce cas, on obtient trois intégrales premières du mouvement ne faisant intervenir que les vitesses et le rayon

$$\begin{aligned} H &\equiv \frac{1}{2} M w^2 + q\Phi = H_o \\ P_\theta &\equiv M r w_\theta + q r A_\theta = P_{\theta_o} \\ P_z &\equiv M w_z + q A_z = P_{z_o} \end{aligned} \qquad (12)\text{-II}$$

On peut alors poursuivre l'intégration complète du système et obtenir les trajectoires.

En utilisant le système (12), on peut calculer la vitesse radiale de la particule.

$$w_r^2 = \frac{2}{M}(H_o - q\Phi) - \left(\frac{P_{\theta_o} - q r A_\theta}{Mr}\right)^2 - \left(\frac{P_{z_o} - qA_z}{M}\right)^2 \equiv \zeta\,(r, H_o, P_{\theta_o}, P_{z_o}) \qquad (13)\text{-II}$$

et en reportant celle-ci dans les équations définissant la vitesse

$$w_r = \frac{dr}{dr}, \quad w_\theta = \frac{r d\theta}{dt}, \quad w_z = \frac{dz}{dt} \qquad (14)\text{-II}$$

on obtient trois nouvelles intégrales premières T, Θ, Z (les phases du mouvement ne dépendant que des variables r, θ, z, et t.)

Soit

$$\begin{aligned} t_o &= t - \int_{r_o}^{r} \frac{dr'}{\varepsilon\sqrt{\zeta\,(r', H_o, P_{\theta_o}, P_{z_o})}} \equiv T \\ \theta_o &= \theta - \int_{r_o}^{r} \frac{dr'\,[P_{\theta_o} - q r' A_\theta (r')]}{\varepsilon\sqrt{\zeta\,(r', H_o, P_{\theta_o}, P_{z_o})}\, Mr'^2} \equiv \Theta \\ z_o &= z - \int_{r_o}^{r} \frac{P_{z_o} - q A_z (r')}{M\varepsilon\sqrt{\zeta\,(r', H_o, P_{\theta_o}, P_{z_o})}}\, dr' \equiv Z \\ &\text{avec } \varepsilon = \pm 1 \end{aligned} \qquad (15)\text{-II}$$

Ce type d'intégrale est tout à fait courant en dynamique [2] et jouit d'un certain nombre de propriétés fondamentales que l'on mettra en évidence sur ce cas particulier.

Pour plus de simplicité, on n'étudiera pas les trajectoires limites de certaines particules mais la trajectoire la plus générale ;

Pour celle-ci, la fonction $\zeta(r)$ est régulière et bornée dans tout intervalle ne comprenant ni l'origine, ni n'infini

$\zeta(0)$ vaut $-\infty$ (excepté certains cas où $P_{\theta_o} = 0$)

$\zeta(\infty)$ vaut $-\infty$ si l'on suppose qu'il existe à l'infini un champ magnétique B_z ou un courant ;

H_o, P_{θ_o} et P_{z_o} sont tels que la particule existe : il existe un rayon r_o tels que la vitesse radiale w_r soit réelle, donc tel que $\zeta\,(r_o, H_o, P_{\theta_o}$ et $P_{z_o}) > 0$ (l'égalité ne sera pas considérée étant un cas de trajectoire limite).

De cet ensemble de propriétés, il est facile de déterminer l'allure de la courbe $\zeta(r,)$: (Fig. 1-II)

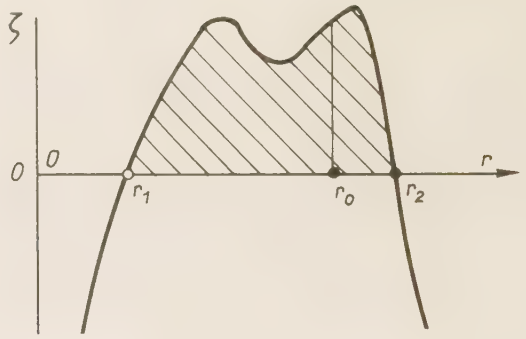


Fig. 1 II

il existe autour de r_o une région limitée par deux rayons r_1 et r_2 tels que $\zeta(r_1) = \zeta(r_2) = 0$, région dans laquelle $\zeta(r) \geq 0$. La trajectoire de la particule est alors limitée par ces deux rayons, la vitesse restant réelle.

En général, r_1 et r_2 seront des zéros simples de $\zeta(r)$ et les diverses intégrales intervenant dans (15) seront convergentes : le mouvement radial de la particule est un mouvement périodique de période $\frac{2\pi}{\omega_c}$

$$\frac{2\pi}{\omega_c} = 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\zeta(r)}} \equiv \oint \frac{dr}{\sqrt{\zeta(r)}} \qquad (16)\text{-II}$$

Il est à remarquer que ω_c est fonction uniquement de H_o, $P_{\theta o}$ et P_{zo} et définit une fréquence cyclotronique généralisée. On verra que pour des petits rayons de Larmor cette fréquence est donnée à l'ordre zéro par la définition usuelle de la fréquence cyclotronique [1] $\omega_c = \frac{qB}{M}$.

De la même façon, le mouvement radial est une fonction périodique de l'angle θ et de la coordonnée z. Il s'ensuit que l'on peut définir une vitesse de rotation ω_r et une vitesse longitudinale ν.

$$\omega_r = \omega_c \oint \frac{(P_{\theta o} - q r A_\theta)}{2\pi \sqrt{\zeta(r)}\, M\, r^2}\, dr$$

$$\nu = \omega_c \oint \frac{P_{zo} - q A z}{2\pi M \sqrt{\zeta(r)}}\, dr \qquad (17)\text{-II}$$

On peut donc mettre les équations de la trajectoire sous la forme

$$r = \sum a_n e^{in\omega_c t}$$

$$\theta = \omega_r t + \sum \theta_n e^{in\omega_c t} \qquad (18)\text{-II}$$

$$z = \nu t + \sum z_n e^{in\omega_c t}$$

a, θ_n et z_n étant des coefficients constants pour une particule donnée. Les trois pulsations ω_c, ω_r et ν joueront un rôle fondamental dans les ondes : elles définiront les fréquences des résonances particulaires par combinaisons de leurs divers harmoniques.

Calcul des pulsations dans le cas des petits rayons de Larmor

Le cas des petits rayons de Larmor est un cas assez général au point de vue expérimental. On calculera dans ce cas, les diverses fréquences ω_c, ω_r et ν aux premiers ordres en développant en fonction des rayons de Larmor $\left(\frac{r_1 - r_2}{2}\right)$; d'une manière plus précise, on supposera $r_1 - r_2$ petit devant le rayon r_1 et les gradients de champs magnétique et électrique.

La fonction $\zeta(r)$ sera développée jusqu'au troisième ordre inclus en Dr, en posant $Dr = r - r_c$, r_c étant le rayon moyen de la trajectoire.

Cette approximation permettra d'obtenir les diverses vitesses de dérive ainsi que les variations de fréquence cyclotronique dues aux gradients de champs magnétique et électrique.

On définit diverses grandeurs par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \zeta'(r_c) = 0 \\ Dr = r - r_c \\ DP_\theta = P_\theta - q r_c A_\theta (r_c) \\ DP_z = P_z - q A_z (r_c) \\ DH = H - q \Phi (r_c) \end{cases} \qquad (19)\text{-II}$$

avec ces notations

$$w^2 = \frac{2}{M} DH + \frac{2q}{M} E_r Dr + \frac{2q}{M} E_r' \frac{Dr^2}{2}$$

$$w_z = \frac{1}{M}\left[DP_z + q B_\theta Dr + q B_\theta' \frac{Dr^2}{2} \right]$$

$$w_\theta = \frac{1}{M r_c}\left[DP_\theta - q r_c B_z Dr + q (B_z - r_c B_z') \frac{Dr^2}{2} - \frac{DP_\theta Dr}{r_c} \right]$$

formules dans lesquelles les divers champs sont pris au rayon r .

On notera que les champs magnétiques sont d'ordre 0 alors que

$$\left.\begin{matrix} w_r,\ w_z,\ w_\theta \\ DP_z,\ DP_\theta,\ E_r,\ E_r' \end{matrix}\right\} \quad \text{sont du même ordre que Dr.}$$

DH est du deuxième ordre.

Ces équations permettent de calculer les premiers ordres de la fonction $\zeta(r)$ (jusqu'à l'ordre Dr^3 inclus)

$$\begin{aligned} &\zeta(r) \equiv w_r^2 = \\ &2\frac{DH}{M} - \frac{DP_\theta^2}{r_c^2 M^2} - \frac{DP_z^2}{M^2} \\ &+ 2Dr\left[\frac{q B_z DP_\theta}{M^2 r_c} - q B_\theta \frac{DP_z}{M^2} + \frac{q E_r}{M} - \frac{DP_\theta^2}{M^2 r_c^3} \right] \\ &- Dr^2\left[\frac{q^2 B^2}{M^2} - \frac{q E_r'}{M} - \frac{DP_z\, q B_\theta'}{M^2} - \frac{DP_\theta\, q B_z'}{M^2 r_c} + \frac{3 q B_z DP_\theta}{M^2 r_c^2} \right] \\ &+ Dr^3 \frac{q^2}{M^2}\left(\frac{B_z^2}{r_c} - B_z B_z' - B_\theta B_\theta' \right) \end{aligned} \qquad (21)\text{-II}$$

Ayant calculé la fonction $\zeta(r)$ il est alors possible de calculer les fréquences fondamentales du mouvement particulaire dans le cadre considéré (petits rayons de Larmor).

En utilisant une méthode approchée pour le calcul des intégrales du type

$$\oint \frac{b(r)\, dr}{\sqrt{\zeta(r)}} \qquad \text{(voir Appendice)}$$

on obtiendra alors les équations suivantes dont les deux premières ne sont que les définitions du rayon de Larmor généralisé a et du rayon moyen r_c

$$\frac{2DH}{M} - \frac{DP_\theta^2}{M^2 r_c^2} - \frac{DP_z^2}{M^2} = a^2 \omega_c^2$$

$$\frac{qB_z}{Mr_c} DP_\theta - q \frac{B_\theta DP_z}{M} + q E_r + \frac{DP_\theta^2}{M r_c^3} = 0$$

$$\omega_c^2 = \frac{q^2 B^2}{M^2} - \frac{q E'_r}{M} - \left(\frac{3 q B_z}{M^2 r_c^2} - \frac{q B'_z}{M^2 r_c}\right) DP_\theta + \frac{DP_z \; q B'_\theta}{M^2} \qquad (22)\text{-II}$$

$$\omega_r = \frac{DP_\theta}{M r_c^2} + \frac{a^2 q}{4 r_c M} \left\{ - B'_z + \frac{3 B_z}{B^2} \left[B_\theta B'_\theta + B_z B'_z + \frac{B_\theta^2}{r} \right] \right\}$$

$$\nu = \frac{DP_z}{M} - \frac{a^2 q}{4M} \left[B'_\theta - \frac{3 B_\theta}{B^2} \left(B_\theta B'_\theta + B_z B'_z + \frac{B_z^2}{r} \right) \right]$$

Au lieu d'utiliser les valeurs des intégrales H, P_θ ou P_z pour définir une trajectoire, on choisira un autre système de constantes : a le rayon de Larmor, r le rayon moyen et w_b la vitesse de la particule le long du champ magnétique au rayon r_c, $\bar{e}_b$ étant le vecteur unitaire porté par le champ magnétique.

Avec ce système de constantes, les équations (22) se réécrivent

$$\omega_c = \frac{qB}{M} - \frac{E'}{2B} - \frac{w_b}{2} \left[\frac{B_z B'_\theta - B_\theta B'_z}{B^2} + \frac{3 B_z B_\theta}{B^2 r_c} \right] \qquad (23)\text{-II}$$

$$\bar{w}_M \equiv w_b \bar{e}_b - (\bar{B} \times \bar{e}_r) \left[\frac{E_r}{B^2} - \frac{M w_b^2 B_\theta^2}{q r_c B^4} - \frac{a^2 q (B^2)'}{4 M B^2} \right]$$

Dans l'équation (23) $\bar{w}_M$ représente la vitesse moyenne de la particule, cette vitesse moyenne comprend une vitesse le long des lignes de champ arbitraire w_b et une vitesse perpendiculaire w_D. La vitesse perpendiculaire comprend les trois effets classiques [1] : vitesse de dérive due au champ électrique, à la force centrifuge et au gradient de champ magnétique.

$$\bar{w}_M \equiv w_b \bar{e}_b + (\bar{e}_r \times \bar{e}_b) w_D$$

On voit, par contre, que la fréquence cyclotronique ne dépend pas uniquement du champ magnétique, mais des gradients de champ électrique ainsi que de la courbure des lignes de force.

B - ETATS STATIONNAIRES D'UN PLASMA SANS COLLISIONS DANS UNE GEOMETRIE CYLINDRIQUE DE REVOLUTION.

1/ Cas général

On a déjà vu que l'équation de Boltzmann sans collision signifie que la fonction de distribution f est une constante du mouvement individuel.

En ne cherchant que les états statiques valables dans une géométrie cylindrique de révolution, on impose de plus à la fonction de distribution les conditions suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0. \qquad (24)\text{-II}$$

Dans ce cas la fonction f est une fonction arbitraire des 3 constantes calculées précédemment H, P_θ et P_z, ces 3 constantes étant exprimées en fonction de $\bar{w}$ et r par les équations (7).

Soit

$$f(\bar{w}, r) \equiv f_o (H, P_\theta, P_z) \qquad (25)\text{-II}$$

il est à remarquer que f_o est une fonction arbitraire mais que jusqu'à présent il n'a pas été tenu compte de la seconde partie des équations de Maxwell.

$$\nabla \cdot \bar{E} = 4\pi c^2 \sum_j q_j n_j \quad \text{(u.e.m.)}$$

$$\nabla \times \bar{B} = 4\pi \bar{J} \qquad (26)\text{-II}$$

où c est la vitesse de la lumière, $\bar{J}$ la densité de courant électrique. Pour que le système soit cohérent il sera nécessaire de faire le calcul de grandeurs macroscopiques et de prendre en considération le fait qu'il existe plusieurs types de particules.

Soit n_j la densité numérique et $\bar{V}_j$ la vitesse macroscopique des particules de masse M_j et de charge q_j on aura

$$n_j\ (r) = \iiint f_{jo}\ (H_j,\ P_{\theta j},\ P_{zj})\ d^3w$$

$$V_{zj}\ (r) = \frac{1}{n_j\ (r)} \iiint f_{jo}\ (H_j,\ P_{\theta j},\ P_{zj})\ d^3w\ w_z \qquad (27)\text{-II}$$

$$V_{\theta j}\ (r) = \frac{1}{n_j\ (r)} \iiint f_{jo}\ (H_j,\ P_{\theta j},\ P_{zj})\ d^3w\ w_\theta$$

Il est facile de vérifier que les équations de Maxwell (26) s'écrivent alors

$$\sum_j n_j q_j = \frac{-1}{4\pi r c^2} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right)$$

$$\sum_j V_{zj}\ n_j\ q_j = \frac{-1}{4\pi r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_z}{dr} \right) \qquad (28)\text{-II}$$

$$\sum_j V_{\theta j}\ n_j\ q_j = \frac{-1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r A_\theta) \right)$$

ce qui, en connaissant les fonctions de distribution relatives aux divers groupes de particules, ou plus exactement en sachant quelles sont les fonctions arbitraires f_{oj}, permet de calculer les potentiels vecteurs et scalaires par la résolution du système différentiel [28].

2/ Etude de certaines fonctions de distribution

On se placera dans le cas où la fonction de distribution est isotrope autour d'une vitesse macroscopique moyenne au voisinage d'un point donné, ceci étant valable pour les divers types de particules : f_j sera une fonction de $[\bar{w} - \bar{V}_j\ (r_1)]$ pour $r = r_1$, $\bar{V}_j\ (r_1)$ étant la vitesse moyenne des particules j au point considéré. En utilisant le fait que $f_j\ [(\bar{w} - \bar{V}_j\ (r_1))^2,\ r_1]$ est une fonction des intégrales premières H_j, $P_{\theta j}$ et P_{zj} on obtient par une identification dans l'espace des vitesses que la fonction de distribution est une fonction arbitraire d'une combinaison linéaire des intégrales premières précédentes, soit

$$f_j\ (\bar{w},\ r) \equiv f_{jo}\ (H - \Omega_j\ P_{\theta j} - V_{zj}\ P_{zj}) \qquad (29)\text{-II}$$

Ω_j et V_{zj} étant des constantes.

En considérant l'équation (29) on obtient directement les vitesses macroscopiques

$$V_{jr} = 0,\ V_{j\theta} = \Omega_j r,\ V_{jz} = V_{jz} \qquad (30)\text{-II}$$

Cette distribution des vitesses macroscopiques est celle d'un cylindre solide ayant un mouvement helicoïdal autour de son axe : la vitesse longitudinale étant égale à V_{zj} et la vitesse angulaire de rotation à Ω_j. $H_j - \Omega P_{\theta j} - V_{zj}\ P_{zj}$ représente une énergie qui peut être décomposée en une énergie thermique $\frac{M_j}{2} (\bar{w} - \bar{V}_j)^2$ et une énergie potentielle $\Pi_j\ (r)$

$$\Pi_j(r) = - q_j\ \Omega_j\ r A_\theta - q_j\ V_{zj}\ A_z + q_j\ \Phi - \frac{M_j\ \Omega_j^2\ r^2}{2} \qquad (31)\text{-II}$$

$\Pi\ (r)$ se compose de 2 potentiels magnétiques, d'un potentiel électrostatique et d'un potentiel centrifuge.

3/ Cas où il y a deux types de particules ayant des charges de signes opposés

L'indice i sera réservé aux ions et l'indice e aux électrons ; on supposera de plus que la configuration est basée sur un confinement magnétique pour une des deux assemblées, par exemple celle des électrons. Dans le cas d'un confinement du type striction simple (Pinch), en se plaçant dans un repère tel que $|V_i| \ll |V_e|$ la condition précédente s'écrit en posant

$$q_e = -q \qquad \text{et} \qquad q_i = Zq$$

$$V_e \; A_z | \gtrsim | \Phi |$$

ou en tenant compte des équations (28)

$$Z\, n_i\,(r) - n_e\,(r) \lesssim \frac{V_e^2}{c^2}\, n_e\,(r) \qquad (32)\text{-II}$$

relation exprimant la quasi neutralité d'un plasma non relativiste. On obtient une relation analogue dans le cas d'un confinement par champ axial.

Les équations (28) seront donc remplacées, en négligeant le terme $\frac{V_e^2}{c^2}$ devant l'unité, par le système suivant

$$Z\, n_i\,(r) = n_e\,(r) \qquad (33)\text{-II}$$

$$\left.\begin{aligned} q\,(Z\,V_{zi} - V_{ze})\, n_e\,(r) &= \frac{1}{4\pi r}\frac{d}{dr}\,(r\,B_\theta) \\ q\,(Z\,\Omega_i - \Omega_e)\, n_e\,(r) &= \frac{-1}{4\pi r}\,\frac{d}{dr}\,(B_z) \end{aligned}\right\} \qquad (34)\text{-II}$$

on peut résoudre partiellement ce système par une combinaison linéaire des équations (34) : (on prendra Z = 1 pour des raisons d'écriture)

$$B_{zo} - B_z = \frac{\Omega_i - \Omega_e}{V_{zi} - V_{ze}}\,(r\,B_\theta - 2\,\Lambda) \qquad (35)\text{-II}$$

On obtient donc une relation linéaire entre le champ magnétique longitudinal et le produit du champ magnétique tangentiel B_θ par le rayon. Dans la formule précédente B_{zo} est la valeur du champ magnétique sur l'axe et Λ le courant circulant dans un conducteur placé sur cet axe

Un cas particulier intéressant est le cas où les deux fonctions f ont la même structure soit :

$$\left.\begin{aligned} f_i\,(\bar{w}_i\ \bar{r}) &\equiv \frac{1}{Z}\, g\left[\frac{H_i - \Omega_i\, P_{\theta i} - V_{zi}\, P_{zi}}{K\, T_i} - a_i\right] \\ f_e\,(\bar{w}_i\ \bar{r}) &\equiv g\left[\frac{H_e - \Omega_e\, P_{\theta e} - V_{ze}\, P_{ze}}{K\, T_e} - a_e\right] \end{aligned}\right\} \qquad (36)\text{-II}$$

L'équation (33) peut alors s'écrire

$$\frac{\Pi_i\,(r)}{K\,T_i} = \frac{\Pi_e\,(r)}{K\,T_e} \qquad (37)\text{-II}$$

où K est la constante de Boltzmann, Ti et Te deux constantes ayant les dimensions d'une température, mais ne devenant les températures électroniques et ioniques que dans le cas où g est une exponentielle décroissante. L'étude numérique sera faite dans ce cas. On retrouvera comme cas particulier le potentiel de P.C. Thonemann [3] et la répartition radiale de W.N. Bennet [4].

La résolution de l'équation (37) donne :

$$\Phi\,(r) = \frac{\Omega_e\, T_i + Z\,\Omega_i\, T_e}{T_i + Z\, T_e}\, r A_\theta + \frac{V_{ze}\, T_i + Z V_{zi}\, T_e}{T_i + Z\, T_e}\, A_z - r^2\, \frac{M_e\, \Omega_e^2\, T_i - M_i^2\, \Omega_i^2\, T_e}{2q\,(T_i + Z T_e)} \qquad (38)\text{-II}$$

et pour la densité numérique avec $Z_i = 1$:

$$n(r) = n\left[\left(\frac{1}{K(T_e + T_i)}\right)\left(q(\Omega_e - \Omega_i)\, r A_\theta + q(V_{ze} - V_{zi})\, A_z + (M_e \Omega_e^2 + M_i \Omega_i^2)\frac{r^2}{2}\right)\right] \qquad (39)II$$

En rappelant les équations déjà obtenues, on forme avec l'équation (39) le système différentiel permettant de calculer les champs magnétiques moyennant la connaissance de la fonction g et d'un certain nombre de paramètres

$$q(\Omega_i - \Omega_e)\, n(r) = \frac{-1}{4\pi r}\frac{d}{dr}(B_z)$$

$$B_{zo} - B_z = \frac{\Omega_i - \Omega_e}{V_{zi} - V_{ze}}(r B_\theta - 2\Lambda) \qquad (40)II$$

$$B_z = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r A_\theta)$$

$$B_\theta = \frac{d}{dr}(A_z)$$

On peut ainsi adjoindre au système (40) les équations suivantes de manière à résumer les principaux résultats :

$$V_{jr} = 0,\quad V_{j\theta} = \Omega_j r,\quad V_{zj} = \text{constante}$$

4/ Résumé des hypothèses et validité du modèle

Les hypothèses qui ont été faites sont les suivantes

1) l'absence de collisions

2) l'état stationnaire : les champs magnétiques et électriques sont indépendants du temps et par suite il n'y a pas, compte tenu de l'absence de collisions, de champ électrique longitudinal.

3) l'isotropie des fonctions de distribution autour d'une vitesse macroscopique.

On peut considérer que l'hypothèse 1 est vérifiée si l'on s'intéresse à la configuration instantanée d'un plasma et non à son évolution dans le cas où les deux conditions suivantes sont remplies :

a) le temps que dure une collision est beaucoup plus petit que celui qui s'écoule entre deux collisions (définies par une déviation 90° par exemple)

b) les longueurs caractéristiques L liées aux gradients qui existent dans un plasma ne sont pas d'un ordre très supérieur au libre parcours moyen.

L'hypothèse 2 peut être vérifiée si la variation des champs magnétiques est négligeable pendant le temps LV^{-1} où V est la vitesse moyenne des particules, et si de plus les champs électriques d'induction sont faibles ; on peut aussi remarquer qu'une combinaison linéaire des intégrales premières H, P_θ et P_z est une intégrale première valable dans des conditions beaucoup plus générales en particulier dans le cas de déformations hélicoïdales conservant le pas des courants.

L'hypothèse 3 est une première approximation pour une fonction de distribution.

C - RESULTATS NUMERIQUES ET CONFRONTATION EXPERIMENTALE

1/ Intégration des équations (40)

La résolution du système différentiel a été faite dans le cas où le potentiel centrifuge

$$\frac{1}{2}(M_e \Omega_e^2 + M_i \Omega_i^2)\, r^2$$

est négligeable vis à vis des "potentiels magnétiques" qui sont de l'ordre de grandeur de l'énergie thermique du plasma.

En choisissant comme fonction g la fonction e^x le système (40) s'écrit :

$$n(r) = n_o \exp\left[\frac{q}{K(T_e + T_i)}\left((\Omega_1 - \Omega_e)\, r\, A_\theta\,(r) + (V_{zi} - V_{ze})\, A_z\,(r)\right)\right]$$

n_o étant une constante de la dimension d'une densité (densité au centre d'un plasma lorsqu'il n'y a pas de conducteur axial).

Equations en variables réduites

En remplaçant q en uem par sa valeur $\frac{e}{c}$, e étant la charge de l'électron en unités électrostatiques et en posant

$$X = q\frac{\Omega_e - \Omega_i}{K(T_e + T_i)} r\, A_z$$

$$Y = q\frac{V_{ze} - V_{zi}}{K(T_e + T_i)} \int_o^r \left(B_\theta - \frac{2\Lambda}{r}\right) dr \qquad (41)\text{-II}$$

$$\rho = \frac{r}{r_o} \quad \text{avec} \quad r_o = \frac{ch_o}{V_{ze} - V_{zi}},\ h_o = \left[\frac{K(T_e + T_i)}{4\pi n_o e^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

on obtient

$$\frac{\tilde{\lambda}}{2} + \tilde{\mu}^2 \frac{1}{\rho}\frac{dX}{d\rho} = \rho\frac{dY}{d\rho}$$

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dY}{d\rho}\right) = \rho^{\tilde{\nu}+1} e^{-(X+Y)} \qquad (42)\text{-II}$$

où les paramètres $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\nu}$ sont

$$\tilde{\lambda} = \frac{B_{zo}\, c}{e(\Omega_i - \Omega_e)\, 2\pi r_o^2 n_o}$$

$$\tilde{\mu} = \frac{V_{ze} - V_{zi}}{(\Omega_e - \Omega_i)\, r_o} \qquad (43)\text{-II}$$

$$\tilde{\nu} = \frac{2e(V_{ze} - V_{zi})\,\Lambda}{cK(T_e + T_i)}$$

avec comme conditions initiales pour $\rho = 0$

$$X = 0,\ Y = 0,\ \frac{dY}{d\rho} = 0 \qquad (44)\text{-II}$$

Les valeurs calculées seront alors

$$\frac{n_e}{n_o},\ \frac{B_z\,\tilde{\lambda}}{2B_{zo}\tilde{\mu}^2},\ \frac{B_\theta\,\tilde{\lambda}}{2B_{zo}\tilde{\mu}^2}$$

Conséquences des équations précédentes :

On obtient les équations suivantes qui ne sont que des équations aux dimensions :

en posant

$$n_o K(T_e + T_i) = P_o$$

$$P_o = 4\pi r_o^2 I_{zo} = n_o (V_{ze} - V_{zi})\frac{e}{c} = \frac{B_{zo}\tilde{\mu}}{2\pi r_o \tilde{\lambda}}$$

Dans le cas d'une striction simple ($\tilde{\nu} = 0$) on peut chercher la condition pour que la densité de courant électrique I_z soit constante au voisinage de l'axe. Cette condition est obtenue en écrivant que le développement limité de la densité n(r) au voisinage de r = 0 est de la forme $n_o + d_4 r^4$.

Cette condition s'écrit au voisinage de l'axe

$$\frac{I_\theta}{B_\theta} = \frac{I_z}{B_z}$$

ce qui se traduit par $\tilde{\lambda} = \tilde{\mu}^2$

Cette relation correspond à un "champ sans force" au centre du plasma. Dans la suite, les configurations de ce type vers lesquelles ont l'air d'évoluer les configurations expérimentales seront dénommées configurations (C.C.S.F.) (configuration centrale sans force).

2/ Résultats expérimentaux obtenus dans des géométries cylindriques sans conducteur axial

La comparaison des résultats expérimentaux et calculés porte sur les résultats obtenus par J.L. Tuck [5] dans une chambre à striction linéaire, colombus S_4 et sur ceux obtenus par S.A. Colgate [6] sur un montage analogue. Fig. 2, 3 et 4-II.

La première vérification qui n'implique pas la distribution maxwellienne pour les fonctions g_i porte sur l'existence d'une relation linéaire entre B_z et $r B_\theta$ (courbes suivantes). On peut considérer que l'on obtient avec une assez bonne approximation des droites si l'on élimine un certain nombre de cas : décentrage du plasma, plasma sur les parois. L'isotropie doit être à peu près réalisée par les collisions dans ces conditions expérimentales.

3/ Courbes obtenues par l'intégration numérique du système différentiel (équation 34)

a) Sans conducteur axial

L'intégration numérique a été réalisée à Fontenay-aux-Roses par M. de Palma sur une machine à calculer digitale.

La figure 5 représente le plan des paramètres $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}^2$ et les courbes des différents types :

La figure 6 permet à partir d'une courbe expérimentale de retrouver les paramètres $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ d'une courbe calculée qui pourrait lui correspondre et d'obtenir ainsi une répartition possible des pressions qui sont alors proportionnelles à la densité. Le plan $\tilde{\lambda}, \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}^2}$ comporte 2 réseaux de courbes : le réseau 1 correspond au rapport, $\frac{B_{z\ \text{minimum}}}{B_{zo}}$ le réseau 2 au rapport $\frac{B_{zo}}{B_{\theta\ \text{maximum}}}$

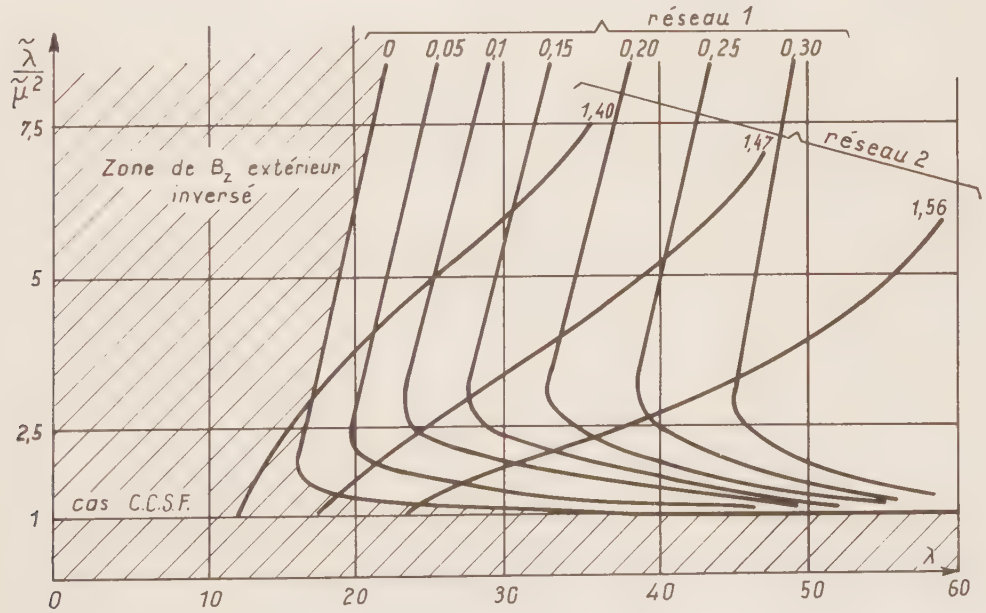
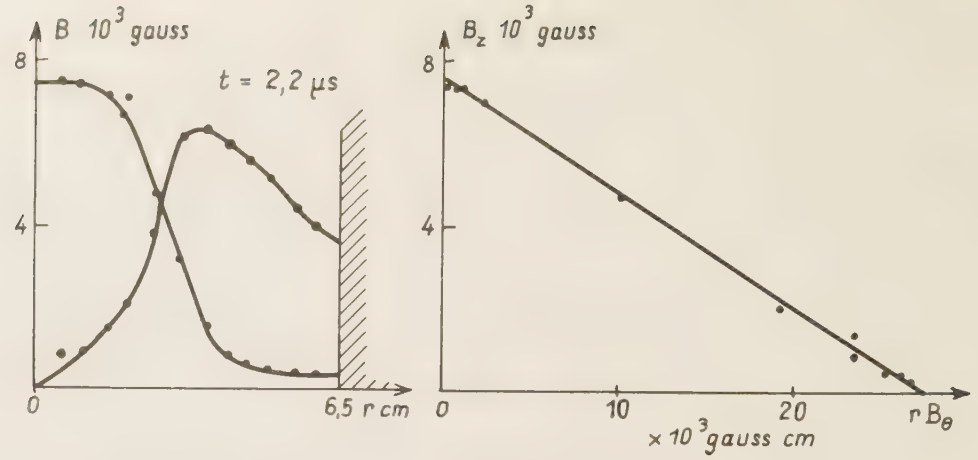
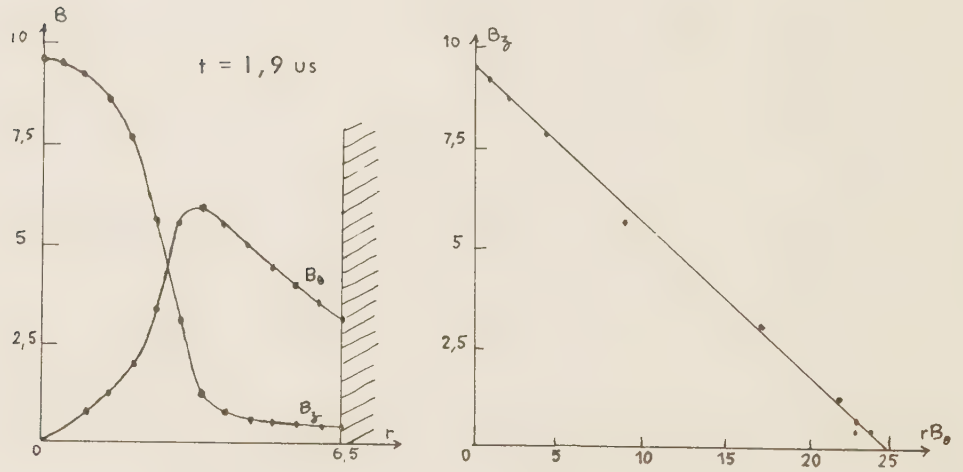


Figure 6-II



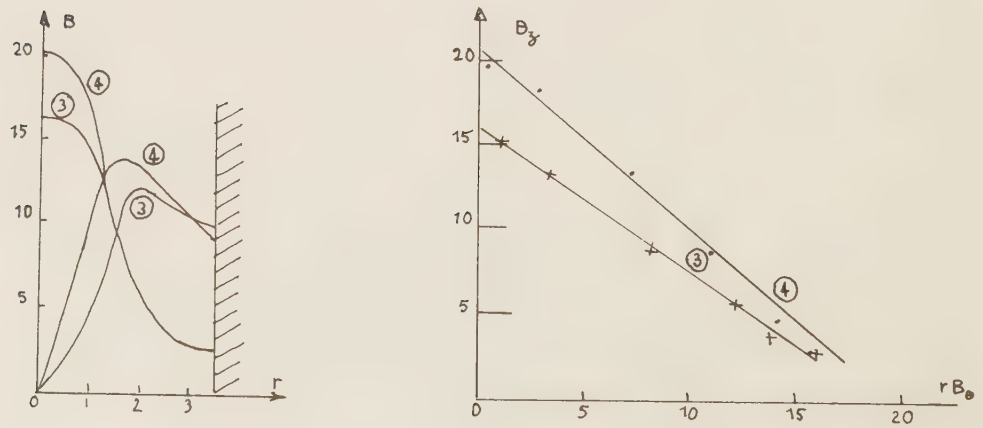
Colombus S_4

Fig. 2-II



Colombus S_4

Fig. 3 -II



(Colgate)

Fig. 4 -II

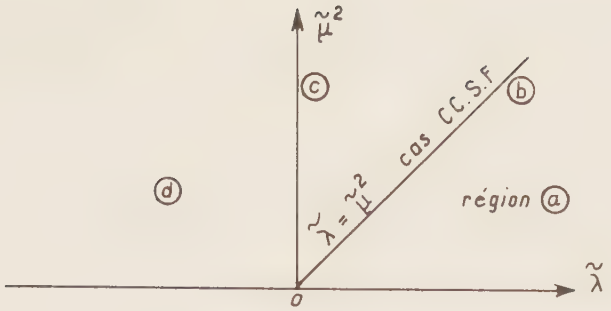


Fig. 5-II

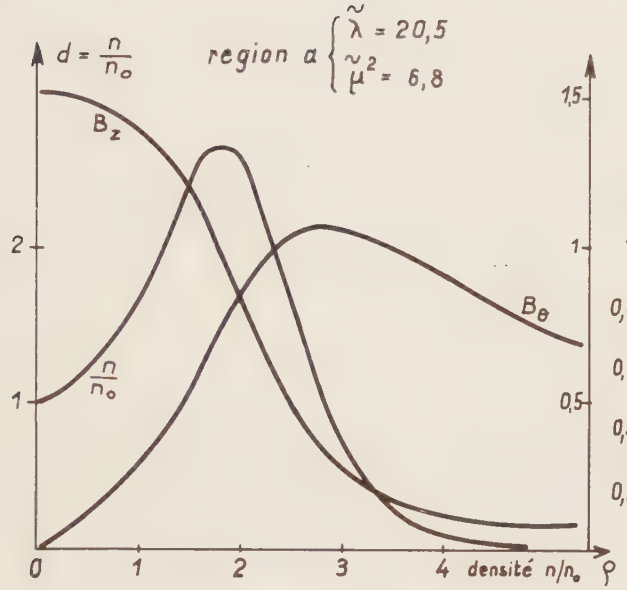


Fig. 5a-II

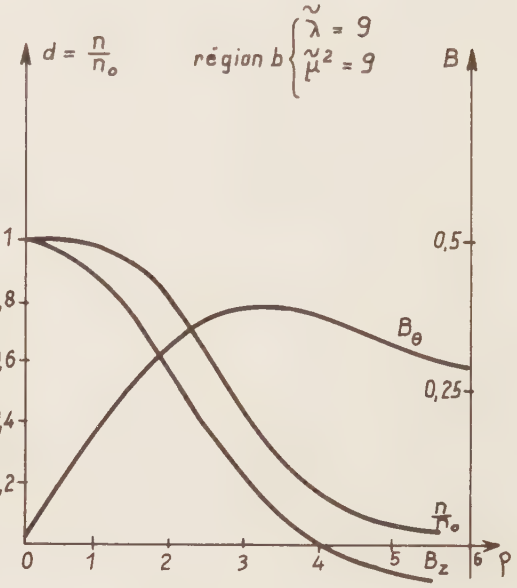


Fig. 5b-II

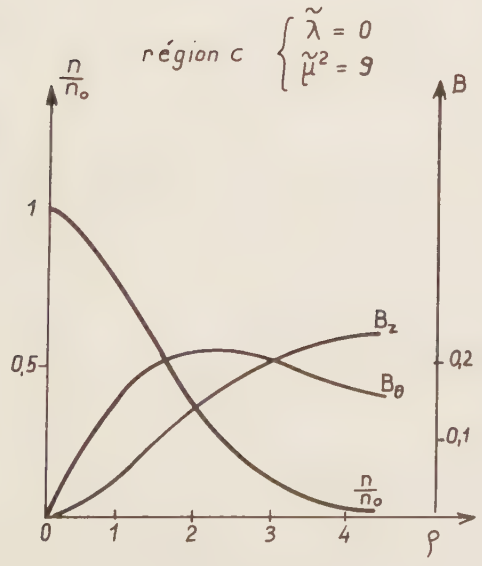


Fig. 5c-II

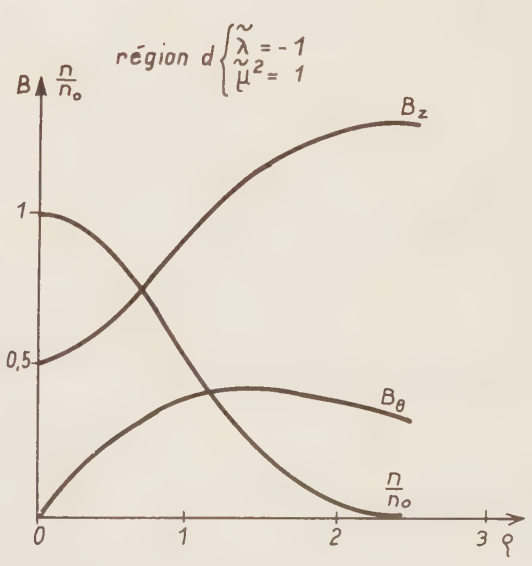


Fig. 5d-II

b) avec conducteur axial

On sera dans le cas où $\tilde{\nu} > 0$. On peut dans ce cas s'attendre à des types de courbes correspondant à des configurations de striction tubulaire simple ou inverse (triaxial pinch, ou "hard-core pinch") Fig. 7 et 8-II.

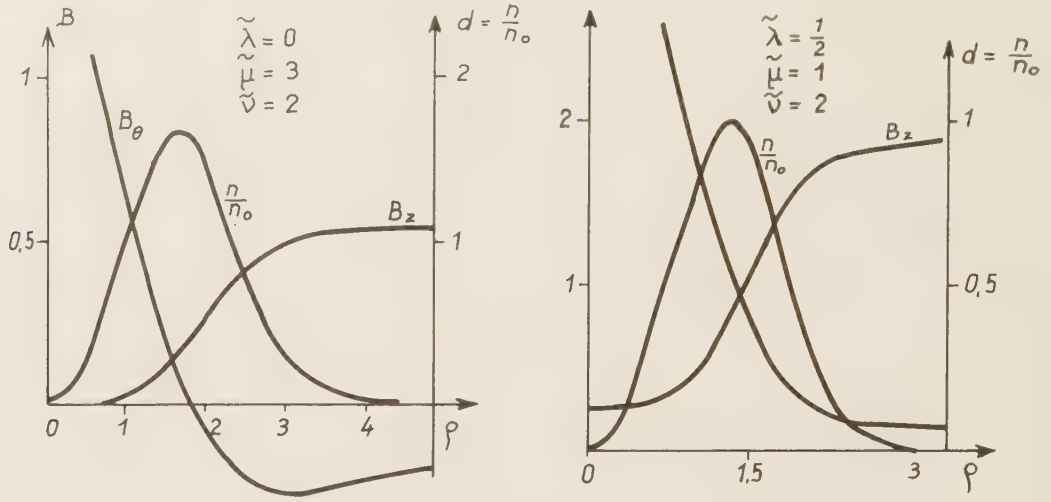


Figure 7 et 8-II

4/ Conclusion

L'existence d'une relation linéaire entre le champ magnétique axial B_z et le produit $r B_\theta$ semble relativement bien vérifiée dans les cas considérés. Dans ces conditions la variation de la densité en fonction du rayon est relativement facile à déduire puisque celle-ci est proportionnelle au courant axial et au quotient $\frac{I_\theta}{r}$. De plus la forme des courbes calculées pour les champs magnétiques dans le cas d'une répartition maxwellienne semble bien s'accorder avec les résultats expérimentaux des sondages magnétiques.

D - APPENDICE

Calcul aux deux premiers ordres des intégrales du type

$$\int \frac{b(x)}{\sqrt{\zeta(x)}}\, dx$$

On posera pour définition de x_o l'équation suivante : $\zeta'(x_o) = 0$. $x - x_o$ sera considéré comme un infiniment petit du 1er ordre par l'inégalité

$$\frac{\zeta'''(x_o)(x - x_o)}{\zeta''(x_o)} \ll 1$$

Pour calculer les diverses intégrales on cherchera à exprimer celles-ci en fonction des intégrales connues

$$\int_{-1}^{+1} \frac{y^n\, dy}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Pour cela, on utilisera le changement de variable suivant :

$$y^2 = \frac{-\zeta(x) + \zeta(x_o)}{\zeta(x_o)} \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-\zeta^{(n)}(x_o)(x - x_o)^n}{n!\,\zeta(x_o)}$$

une partie du problème consistera donc à calculer $\frac{dy}{dx}$ en fonction de y

A) Calcul de $\oint \frac{dx}{\sqrt{\zeta(x)}} \equiv \frac{2\pi}{\omega_c}$

avec le nouveau changement de variable

$$\oint \frac{dx}{\sqrt{\zeta(x)}} \equiv 2 \int_{-1}^{+1} \frac{dy \left(\frac{dx}{dy}\right)}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$\text{or} \quad y^2 = \frac{-\zeta''(x_o)(x - x_o)^2}{2\zeta(x_o)} \left[1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2\zeta^{(n)}(x_o)(x - x_o)^{n-2}}{\zeta''(x_o)\, n!} \right]$$

$$\text{soit} \quad y = (x - x_o) \sqrt{\frac{\zeta''(x_o)}{-2\zeta(x_o)}} \left[1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2\zeta(n)(x - x_o)^{n-2}}{\zeta''(x_o)\, n!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(x - x_o) = \sqrt{\frac{2\zeta(x_o)}{-\zeta''(x_o)}}\, y \left[1 + \frac{\zeta^{(3)}}{6\zeta^{(2)}} \sqrt{\frac{2\zeta(x_o)}{-\zeta''(x_o)}}\, y + \frac{\zeta(x_o)\, y^2}{12\zeta''(x_o)} \left[\frac{5}{6} \left(\frac{\zeta^{(3)}}{\zeta''} \right)^2 - \frac{\zeta^{(4)}}{\zeta''} \right] \right]$$

aux deux premiers ordres donc

$$\boxed{\oint \frac{dx}{\sqrt{\zeta x}} \equiv \frac{2\pi}{\omega_c} \sim 2\pi \sqrt{\frac{-2}{\zeta'' x_o}}}$$

B) Calcul de $\oint \frac{b(x)}{\sqrt{\zeta(x)}}$

On posera pour calculer cette intégrale

$$b(x) \equiv b(x_o) + \alpha\zeta'(x) + \gamma(x)(x - x_o)^2$$

on pourra, à l'approximation considérée, b (x) étant en général du premier ordre, poser

$$b(x) \simeq b(x_o) + \alpha\zeta'(x) - \gamma(x_o) \frac{2\zeta(x_o)}{\zeta''(x_o)} y^2$$

par identification, on en déduit

$$\alpha = \lim_{x \to 0} \frac{b(x) - b(x_o)}{\zeta'(x)} \simeq \frac{b'(x_o)(x - x_o)}{\zeta''(x_o)(x - x_o)}$$

donc $\gamma(x_o)$.

Nous avons de même pour $\gamma(x)$

$$\gamma(x) = \frac{b(x) - b(x_o) - \frac{b'(x_o)}{\zeta''(x_o)} \zeta'(x)}{(x - x_o^2)} \sim \frac{b'(x_o)(x - x_o) + \frac{1}{2} b''(x_o)(x - x_o)^2 - \frac{b'}{\zeta''} \left[\zeta''(x_o)(x - x_o) + \frac{\zeta'''(x_o)}{2} (x - x_o)^2 \right]}{(x - x_o)^2}$$

soit :

$$\gamma(x_o) = \frac{1}{2} \left[b''(x_o) - \frac{b'(x_o)\, \zeta'''(x_o)}{\zeta''(x_o)} \right]$$

$$\text{or} \quad \oint \frac{b(x)\, dx}{\sqrt{\zeta(x)}} \sim b(x_o) \oint \frac{dx}{\sqrt{\zeta(x)}} - \frac{\zeta\, \gamma(x_o)}{\zeta''} \oint \frac{2y^2\, dx}{\sqrt{\zeta(x)}}$$

soit :

$$\boxed{\oint \frac{b(x)\, dx}{\sqrt{\zeta(x)}} \simeq \frac{2\pi}{\omega_c} \left[b(x_o) - \frac{\zeta(x_o) \left(b''(x_o)\, \zeta''(x_o) - b'(x_o)\, \zeta'''(x_o) \right)}{2\zeta''^2(x_o)} \right]}$$

III - MÉTHODE DE PERTURBATION POUR L'ÉQUATION DE VLASOV CAS DES CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

La présence d'ondes électromagnétiques se traduit pour le plasma par une force supplémentaire agissant sur chaque particule. Cette force perturbe le mouvement particulaire et par suite modifie la fonction de distribution.

Si l'on connait la nouvelle fonction de distribution on sera en mesure de calculer toutes les grandeurs macroscopiques du plasma telles que courant, tenseur de conductibilité, pression etc.

Cette troisième partie sera consacrée au calcul de la perturbation de la fonction de distribution apportée par un champ de force supplémentaire.

Pour cela on partira de l'équation de Vlasov ou de sa signification géométrique (théorème de Liouville et coordonnées de Lagrange) et au lieu d'utiliser comme variables indépendante de l'espace des phases les 3 composantes de la vitesse et les 3 composantes de la position on utilisera les 6 intégrales premières du mouvement non perturbé.

Dans cet espace le mouvement initial sera représenté par un point fixe. La trajectoire d'une particule ne sera due qu'au mouvement perturbé.

A - METHODE DE PERTURBATION A TOUS LES ORDRES DE L'EQUATION DE VLASOV

1/ Changement de variables

Dans ce changement de variable le temps restera le paramètre de description de la trajectoire.

Les 7 variables $\overline{r}$, $\overline{w}$, t seront donc remplacées par les 6 intégrales premières du mouvement non perturbé H, P_θ, P_z, T, Θ, Z et par le temps t ; les 6 intégrales premières précédentes étant exprimées en fonction de $\overline{r}$, $\overline{w}$, t définiront le changement de variable :

$$H = H(\overline{r}, \overline{w}, t) \equiv \frac{M}{2}\overline{w}^2 - \Phi(r)$$

$$P_\theta = P_\theta(\overline{r}, \overline{w}, t) \equiv M r w_\theta - q r A_\theta(r) \qquad (1)\text{-III}$$

$$P_z = P_z(\overline{r}, \overline{w}, t) \equiv M w_z + q A_z(r) \quad \text{etc.}$$

L'indice o indiquera que l'on prend toutes les grandeurs au temps t = 0 (conditions initiales). Lorsqu'il s'agit de grandeurs macroscopiques ou des variables H, P_θ, P_z, T, Θ ou Z les grandeurs au temps t = 0 seront aussi celles correspondant au mouvement non perturbé, les trajectoires étant représentée par un point fixe. Pour cette raison l'indice 0 se réfèrera aussi au mouvement non perturbé.

On remarquera que le changement de variable défini ci-dessus est toujours régulier :

Le jacobien de la transformation est toujours positif :

$$J = \frac{D(H, P_\theta, P_z, T, \Theta, Z)}{D(\overline{r}, \overline{w})} = M^3 \qquad (2)\text{-III}$$

(En vertu du théorème de Liouville, à des conditions initiales différentes correspondent des trajectoires différentes).

Pour le changement de variable on a par définition

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_o H = \left(\frac{d}{dt}\right)_o P_\theta = \left(\frac{d}{dt}\right)_o P_z = \left(\frac{d}{dt}\right)_o T = \left(\frac{d}{dt}\right)_o \Theta = \left(\frac{d}{dt}\right)_o Z \equiv 0 \qquad (3)\text{-III}$$

où

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_o \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \bar{w} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\bar{F}_o}{M} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \qquad (4)\text{-III}$$

Dans cette formule, F représente la force agissant sur la particule et Fo celle agissant dans le mouvement non perturbé.

2/ Trajectoires dans le nouvel espace des phases

La trajectoires est définie par l'équation des coordonnées en fonction du temps : cette trajectoire sera donnée par la résolution d'un système différentiel dans lequel on écrit la loi de l'accélération.

Soit

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + w \cdot \frac{\partial H}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{F}}{M} \cdot \frac{\partial H}{\partial \bar{w}}$$

$$\frac{dP_\theta}{dt} = \frac{\partial P_\theta}{\partial t} + \bar{w} \cdot \frac{\partial P_\theta}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{F}}{M} \cdot \frac{\partial P_\theta}{\partial \bar{w}} \quad \text{etc.} \qquad (5)\text{-III}$$

Or d'après les équations 4 on peut réécrire le système différentiel des trajectoires :

$$\frac{dH}{dt} = \left(\frac{\bar{F} - \bar{F}_o}{M}\right) \cdot \frac{\partial H}{\partial \bar{w}} \equiv (\bar{F} - \bar{F}_o) \cdot \bar{w}$$

$$\frac{dP_\theta}{dt} = \left(\frac{\bar{F} - \bar{F}_o}{M}\right) \cdot \frac{\partial P_\theta}{\partial \bar{w}} \equiv r\,(\bar{F} - \bar{F}_o) \cdot \bar{e}_\theta$$

$$\frac{dP_z}{dt} = \left(\frac{\bar{F} - \bar{F}_o}{M}\right) \cdot \frac{\partial P_z}{\partial \bar{w}} \equiv (\bar{F} - \bar{F}_o) \cdot \bar{e}_z \qquad (6)\text{-III}$$

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\bar{F} - \bar{F}_o}{M}\right) \cdot \frac{\partial T}{\partial \bar{w}}$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \left(\frac{\bar{F} - \bar{F}_o}{M}\right) \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{w}}$$

$$\frac{dZ}{dt} = \left(\frac{\bar{F} - \bar{F}_o}{M}\right) \cdot \frac{\partial Z}{\partial \bar{w}}$$

d'une manière générale si l'on pose par définition

$$\boxed{\Delta = \int_{o\,\mathscr{C}}^{t} dt' \left(\frac{\bar{F} - \bar{F}_o}{M}\right) \cdot \nabla_{\bar{w}}} \qquad (7)\text{-III}$$

$\int_{o\,\mathscr{C}}^{t}$ signifiant que l'on intègre le long de la trajectoire entre les temps 0 et t le système différentiel s'intègre symboliquement par

$$H = H_o + \Delta H$$

$$P_\theta = P_{\theta_o} + \Delta P_\theta$$

$$P_z = P_{zo} + \Delta P_z$$

$$T = T_o + \Delta T \qquad (8)\text{-III}$$

$$\Theta = \Theta_o + \Delta \Theta$$

$$Z = Z_o + \Delta Z$$

Or si l'on suppose que la force perturbatrice est celle d'un champ électromagnétique dont le champ électrique est E_1, et le champ magnétique B_1, décomposés en ondes de fréquences ω_j et tels que

$$\bar{E}_1 = \sum_j \bar{E}_j (r)\, e^{i(\omega_j t + m_j \theta + k_j z)}$$
$$\bar{B}_1 = \sum_j \bar{B}_j (r)\, e^{i(\omega_j t + m_j \theta + k_j z)} \qquad (9)\text{-III}$$

avec de plus l'équation de Maxwell portant sur chaque terme de la série

$$\frac{\partial \bar{B}_j}{\partial t} = i\omega_j \bar{B}_j = -\nabla \times \bar{E}_j$$

Les équations obtenues des équations 7 et 8 s'écrivent

$$\boxed{\Delta H = \sum_j \int_{o_{\mathfrak{C}}}^{t} dt'\, q\, (\bar{w} \cdot \bar{E}_j) \equiv \sum_j \Delta H_j} \qquad (10)\text{-III}$$

de même

$$i\omega_j \Delta P_{\theta j} = \int_{o_{\mathfrak{C}}}^{t} dt' \left[q[(r E_{j\theta}\, i\omega_j - [\bar{w} \times (\nabla \times \bar{E}_j)] \cdot \bar{e}_\theta)] \right]$$
$$= \int_{o_{\mathfrak{C}}}^{t} dt' \left[q \frac{d}{dt} (r E_{j\theta}) - q\, m_j\, \bar{w} \cdot \bar{E}_j \right]$$

soit

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta P_\theta &= \sum_j \left(q\, \frac{(rE_{j\theta})(t) - (rE_{j\theta})(o)}{i\omega_j} - \frac{m_j}{\omega_j} \Delta H_j \right) \\ \Delta P_z &= \sum_j \left(q\, \frac{E_{jz}(t) - E_{jz}(o)}{i\omega_j} - \frac{k_j}{\omega_j} \Delta H_j \right) \end{aligned}} \qquad (11)\text{-III}$$

Les formules 9, 10 et 11 peuvent être regardées comme des formules de "collision" entre une onde et une particule, collision dans laquelle il y a un échange d'énergie et une certaine conservation des quantités de mouvement globales ainsi que de l'énergie totale (onde + particules).

3/ Intégration de l'équation de Vlasov

L'équation de Vlasov s'écrit ainsi que nous l'avons dit dans la première partie $\frac{df}{dt} = 0$ soit dans le système de variables choisi

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial H}\frac{dH}{dt} + \frac{\partial f}{\partial P_\theta}\frac{dP_\theta}{dt} + \frac{\partial f}{\partial P_z}\frac{dP_z}{dt} + \frac{\partial f}{\partial T}\frac{dT}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \Theta}\frac{d\Theta}{dt} + \frac{\partial f}{\partial Z}\frac{dZ}{dt} = 0 \qquad (12)\text{-III}$$

équation qui signifie que f est une fonction arbitraire de 6 intégrales premières du système. Or, connaissant les trajectoires, on connait 6 intégrales premières (les conditions initiales) c'est-à-dire qu'une fonction arbitraire de $H_o = H - \Delta H$, $P_{\theta o} = P_\theta - \Delta P_\theta$, etc, satisfait l'équation aux dérivées partielles 12 (la vérification en est immédiate d'après 6).

On peut donc écrire toute solution de 12 f_p sous la forme

$$f_p \equiv f\,[(H - \Delta H), (P_\theta - \Delta P_\theta), (P_z - \Delta P_z), (T - \Delta T), (\Theta - \Delta\Theta), (Z - \Delta Z)] \qquad (13)\text{-III}$$

au temps t = 0 la fonction de distribution est donnée par $f(H, P_\theta, P_z, T, \Theta, Z)$. La fonction 13 représente donc l'évolution de la fonction de distribution 14 donnée au temps t = 0.

On peut remarquer que jusqu'à présent le traitement fait est valable à tous les ordres et ne fait intervenir aucun infiniment petit. (traitement non linéaire)

Il est aussi possible d'écrire (13) sous la forme d'une série de Taylor moyennant certaines conditions de convergence. Soit $\bar{N}$ le vecteur ayant pour coordonnées H, P_θ, P_z T, θ, Z (position dans l'espace des phases). En définissant les divers ordres de la perturbation par

$$f_{(n)} = (\Delta \bar{N} \cdot \nabla_n)^{(n)} \; f\,(\bar{N})$$

(n) représentant le produit symbolique, on obtient pour la fonction de distribution correspondant au champ perturbé

$$f_p = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{(\Delta \bar{N} \cdot \nabla_N)^{(n)}}{n\,!} \; f\,(\bar{N}) = \sum_{o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,!} f_{(n)} \qquad (14)\text{-III}$$

f $(\bar{N})$ étant la fonction de distribution initiale ou celle qui correspond au champ non perturbé.

B - LINEARISATION - CAS DES PETITES PERTURBATIONS

Un cas particulier intéressant est celui où le champ de force perturbateur est de faible amplitude ou plus exactement ou l'opérateur $(\Delta \bar{N} \cdot \nabla_N)$ est $\ll 1$. Cette définition rencontrera cependant quelques difficultés dans le cas des particules résonnantes. Dans ce dernier cas on substituera aux fonctions de distribution les grandeurs macroscopiques intéressantes (courant, pression etc.) et on calculera directement les divers ordres considérés .

Une grandeur macroscopique locale (courant, densité, pression etc.) sera donnée par

$$G_p\,(\bar{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} g\,(\bar{w})\; f_p\,(\bar{w},\; \bar{r})\; d^3w \qquad (15)\text{-III}$$

ou en exprimant f_p par sa valeur calculée 14

$$G_p(\bar{r}) = \sum_{n} \int_{-\infty}^{+\infty} g\,(\bar{w}) \frac{(-1)^n}{n\,!} \; (\Delta \bar{N} \cdot \nabla_{\bar{N}})^{(n)} \; f\,(\bar{N}) \; d^3w$$

et en posant

$$\boxed{G_{(n)}(\bar{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} g\,(\bar{w}) \; (\Delta \bar{N} \cdot \nabla_{\bar{N}})^{(n)} \; f\,(\bar{N}) \; d^3w} \qquad (16)\text{-III}$$

On définira ainsi la grandeur macroscopique aux différents ordres.

et l'on aura

$$\boxed{G_p\,(\bar{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,!} \; G_{(n)}\;(\bar{r})} \qquad (17)\text{-III}$$

On remarquera que l'ordre 0 correspond à l'évolution libre (sans champ perturbateur) de la fonction de distribution $[f_{(o)} = f\,(\bar{N})]$.

Dans le cas ou le champ perturbateur est suffisamment petit, ou le temps pendant lequel il est appliqué suffisamment court, on pourra se contenter pour la perturbation de l'ordre 1 et écrire

$$\boxed{f_p \simeq f\,(N) - \Delta N \cdot \nabla_{\bar{N}} \; f\,(N)} \qquad (18)\text{-III}$$

Si l'on considère un champ de force perturbateur self-consistant et d'ordre 1 il s'ensuivra que f $(\bar{N})$, représentant la distribution initiale, pourra être décomposé en deux termes :

Un terme d'ordre 0 ne dépendant que de H, P_θ et P_z représentant une distribution de particules en équilibre avec le champ de force non perturbé et un terme d'ordre 1 pouvant dépendre des constantes initiales, terme qui correspond à une perturbation initiale de la fonction de distribution soit

$$\boxed{f\,(\bar{N}) \equiv f_o\;(H,\; P_\theta\,,\; P_z\,) + f_o^1\;(\bar{N})} \qquad (19)\text{-III}$$

En remplaçant f $(\bar{N})$ par sa valeur dans l'équation (18) et en ne retenant que l'ordre 0 et 1 on obtient finalement pour f_p

$$f_p \simeq f_o (H, P_\theta, P_z) - \Delta\bar{N} \cdot \nabla_{\bar{N}} f_o (H, P_\theta, P_z) + f_o^1 (\bar{N}) \qquad (20)\text{-III}$$

On peut remarquer que les deux termes du premier ordre dans f_p se comportent différemment : le premier correspond à une perturbation de la trajectoire des particules du système à l'équilibre et le second à "l'évolution libre" de la partie perturbée de la distribution initiale. On conçoit que l'influence du 2ème terme disparaîtra rapidement par mélange de phase surtout si l'on fait intervenir un processus aléatoire tel que les collisions.

Pour une grandeur macroscopique on obtient par intégration après avoir posé

$$G_p (\bar{r}) - G_o (\bar{r}) \simeq G_1 (\bar{r})$$

$$\boxed{G_1 (\bar{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} g (w) \left[f_o^1 (N) - \Delta\bar{N} . \nabla_{\bar{N}} f_o (H, P_\theta, P_z) \right] d^3w} \qquad (21)\text{-III}$$

formule que l'on pourra expliciter grâce aux équations 9, 10 et 11 dans le cas où le champ perturbateur est une onde électromagnétique. (On ne prend qu'un seul terme de 9 III) en posant

$$f_1 (\bar{w}, \bar{r}) \simeq f_p - f_o (H, P_\theta, P_z)$$

f_1 peut se mettre sous la forme

$$\boxed{\begin{aligned} f_1 (\bar{w}, \bar{r}) \equiv f_o^1 (\bar{N}) - \left[\frac{\partial f_o}{\partial H} - \frac{m}{\omega} \frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} - \frac{k}{\omega} \frac{\partial f_o}{\partial P_z} \right] \int_{o\,\mathfrak{C}}^{t} q (\bar{w} . \bar{E}_1) \, dt \\ - \frac{q}{i\omega} \left[(r E_{1\theta}) (t) - (r E_{1\theta}) (o) \right] \frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} - \frac{q}{i\omega} \left[E_{1z} (t) - E_{1z} (o) \right] \frac{\partial f_o}{\partial P_z} \end{aligned}} \qquad (22)\text{-III}$$

On peut aussi dans le même cadre d'approximation faire une autre approximation linéaire : celle portant sur la trajectoire de la particule, soit sur H dans la formule précédente :

$$\Delta H \equiv \int_{o\,\mathfrak{C}}^{t} q (\bar{w} . \bar{E}_1) \, dt' \quad \text{représente le gain}$$

d'énergie de la particule au temps (t) ; pour obtenir ce gain on intègre la variation d'énergie sur la nouvelle trajectoire de la particule (représentée par $\mathfrak{C}$). On pourra à l'ordre considérée faire cette intégration sur l'ancienne trajectoire $\mathfrak{C}_o$:

$$\Delta H \simeq \int_{o\,\mathfrak{C}_o}^{t} q (\bar{w} . \bar{E}_1) \, dt' \qquad (23)\text{-III}$$

Dans certains cas le calcul sur la nouvelle trajectoire sera plus facile (cas statique où l'énergie dépend d'un potentiel) mais en général on fera cette approximation . On calculera explicitement la fonction perturbée f_1 et ΔH dans la IV^e partie en vue d'obtenir le tenseur de conductivité.

IV - TENSEUR DE CONDUCTIVITÉ D'UN PLASMA CHAUD ET INHOMOGÈNE RÉSONANCES PARTICULIÈRES

Cette quatrième partie sera essentiellement le calcul du tenseur de conductibilité d'un plasma inhomogène en géométrie cylindrique.

On pourra subdiviser ce calcul en deux.

A) Le calcul général sans autre approximation que l'approximation linéaire ; calcul où l'on met en évidence les résonances particulaires (absorption du type Landau) et l'effet des collisions.

B) Le calcul explicite du cas où les gradients à l'équilibre sont faibles (approximation du tenseur obtenu dans le cas général). On obtient ainsi une forme analogue à celle obtenue dans le cas d'un plasma homogène.

A - CALCUL GENERAL DU TENSEUR DE CONDUCTIBILITE

1/ Etablissement des équations

On a vu que la perturbation de la fonction de distribution s'exprime uniquement en fonction des positions initiales et finales des particules et de l'onde, et de la variation d'énergie des particules considérées, les autres termes ne faisant intervenir que la fonction de distribution initiale.

Le seul terme à calculer est donc la variation d'énergie ΔH d'une particule, tous les autres étant connus (distribution initiale, champ électrique de l'onde).

Or la variation d'énergie ΔH est donnée par la formule (23)-III

soit

$$\Delta H = \int_{t_o}^{t} q \, (\overline{w} \cdot \overline{E}_1) \, dt' \qquad (1)\text{-IV}$$

Le champ électrique étant le champ électrique d'une onde de fréquence ω, de mode azimutal m et nombre d'onde longitudinal k on peut écrire en coordonnée cylindrique (les 3 projections r, θ, z sont de cette forme):

$$\overline{E}_1 = \overline{E} \, (r) \, e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \qquad (2)\text{-IV}$$

on a donc à intégrer le long d'une trajectoire à l'équilibre la variation d'énergie de la particule, soit :

$$\Delta H = \int_{t_o}^{t} \overline{w} \, (r', \, H, \, P_\theta, \, P_z) \cdot \overline{E} \, (r') \, e^{i(\omega t' + m\theta' + kz')} \, dt' \qquad (3)\text{-IV}$$

l'indice ' indiquant que l'on prend pour coordonnées celles de la position de la particule sur la trajectoire non perturbée au temps t'. Or d'après l'étude des trajectoires à l'équilibre on sait que l'on peut écrire l'équation de la trajectoire sous la forme (équations 18-II)

$$r' - r = \sum_{n \neq 0} a_n e^{in\omega_c(t'-t)} \qquad (18)\text{-II ou } (4)\text{-IV}$$

$$\theta' - \theta = \omega_r \, (t' - t) + \sum_{n \neq 0} \theta_n e^{in\omega_c(t'-t)} \qquad (18)\text{-II ou } (5)\text{-IV}$$

$$z' - z = v \, (t' - t) + \sum_{n \neq 0} z_n e^{in\omega_c(t'-t)} \qquad (18)\text{-II ou } (6)\text{-IV}$$

formules dans lesquelles t représente une origine des temps, (en réalité t sera le temps de l'observation). t' le temps, ω_c, ω_r, ν, les fréquences fondamentales du mouvement particulaire ; ces fréquences ne dépendant que de H, P_θ et P_z. a_n, θ_n, z_n sont des coefficients de la série de Fourier dépendant de t, H, P_θ et P_z : $\omega_c t$ peut être regardé comme une phase du mouvement de gyration cyclotronique.

En utilisant la formule 4 on voit que les divers coefficients a_n, θ_n et z_n peuvent aussi être considérés comme des fonctions de r, H, P_θ et P_z.

La connaissance de la trajectoire (formules 4, 5 et 6) permet d'obtenir l'expression suivante pour ΔH

$$\Delta H = e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \int_{t_o}^{t} A(r',\ r,\ H,\ P_\theta,\ P_z)\ e^{i(\omega + m\omega_r + k\nu)(t'-t)}\, dt' \qquad (7)\text{-IV}$$

formule dans laquelle

$$A\ (r,\ r,\ H\ ,\ P_\theta,\ P_z) \equiv q\ \bar{w}\ .\ \bar{E}\,(r) e^{i\left[\sum_{n'} (m\theta_{n'} + k z_{n'})\, e^{in'\omega_c (t'-t)}\right]} \qquad (8)\text{-IV}$$

r' étant une fonction périodique de (t' - t) de fréquence ω_c.

On peut décomposer A en série de Fourier soit

$$A\ (r',\ r,\ H,\ P_\theta, P_z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n\,(r,\ H,\ P_\theta,\ P_z)\ e^{in\omega_c (t'-t)} \qquad (9)\text{-IV}$$

ce qui donne pour ΔH

$$\Delta H = \sum_n\ e^{i(\omega t + m\theta + kz)} A_n\ (r,\ H,\ P_\theta,\ P_z) \int_{t_o}^{t} e^{i(\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)(t'-t)}\, dt'$$

Après une intégration sur le temps, la variation d'énergie de la particule s'exprime par :

$$\Delta H = e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \sum_n\ A_n\ \frac{1 - e^{i(\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)(t_o - t)}}{i\ (\omega + n\,\omega_c + m\,\omega_r + k\,\nu)} \qquad (10)\text{-IV}$$

formule dans laquelle A_n est donné par l'inversion de la formule (9)

$$A_n = \frac{\omega_c}{2\pi} \oint q\ \bar{w}\ .\ \bar{E}\ (r')\ e^{\left[\sum (m\theta_{n'} + kz_{n'})\, e^{in'\omega_c (t'-t)} - n\,(t'-t)\,\omega_c\right]} \qquad (11)\text{-IV}$$

$\oint$ représentant l'intégration sur une période cyclotronique.

Il est possible de voir grace à la formule (10) les résonances particulaires : celles-ci existeront lorsque la variation d'énergie cinétique pourra devenir très grande ; dans ce cas le dénominateur s'annulera, A_n ne pouvant devenir infini. Les fréquences de résonances seront donc définies par :

$$-\ \omega = n\ \omega_c + m\ \omega_r + k\nu \qquad (12)\text{-IV}$$

dans ce cas la particule voit la fréquence de l'onde comme une combinaison d'harmoniques de ses fréquences propres. Dans la limite de l'approximation linéaire l'absorption ou l'émission d'énergie sera proportionnelle au temps pour une particule donnée.

En effet la fonction $\frac{1 - e^{i\alpha x}}{i\alpha}$ tend vers $-x$ lorsque $\alpha \longrightarrow 0$.

Connaissant la variation d'énergie cinétique ΔH on se trouve alors en mesure de donner la perturbation de la fonction de distribution : (22)-III

$$f_1\,(\bar{w}\ ,\ \bar{r}\ ,\ t) \equiv f_o^1\,(\bar{N}) - \left(\frac{\partial f_o}{\partial H} - \frac{m}{\omega}\,\frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} - \frac{k}{\omega}\,\frac{\partial f_o}{\partial P_z}\right)\ \Delta H + \\ - \frac{q}{i\omega}\left\{\left[(r\,E_{1\theta})\ (t) - (r\,E_{1\theta})\ (0)\right]\frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} + \left[E_{1z}\ (t) - E_{1z}\ (0)\right]\frac{\partial f_o}{\partial P_z}\right\} \qquad (13)\text{-IV ou (22)-III}$$

ΔH étant exprimé en fonction des champs électriques au temps t et de l'instant initial t_o par la formule (10).

Une première remarque que l'on peut faire c'est que $f_1(\bar{w}, \bar{r}, t)$ se décompose en deux types de termes :

a) des termes correspondant au mouvement forcé du plasma (termes proportionnels à $e^{i(\omega t + m\theta + kz)}$ sans autre dépendance de ces 3 variables)

b) des termes ne faisant pas intervenir le facteur $e^{i\omega t}$ mais les fréquences propres des particules ainsi que les phases initiales ; ces termes représentent les oscillations libres du mouvement particulaire et disparaitront s'il existe un mécanisme d'amortissement tel que les collisions ou si l'on considère une onde croissante - (qui n'est pas obligatoirement une instabilité, car elle peut être imposée de l'extérieur).

Dans les quelques pages qui vont suivre on trouvera une étude détaillée du comportement de ces 2 groupes de termes, étude qui n'est pas absolument nécessaire à la compréhension générale ; la remarque précédente qui sera aussi la conclusion de cette étude suffisant pour la compréhension de la suite. (page 45).

Pour pouvoir classer ces divers termes nous commenceront par étudier le terme $f_o^1(\bar{N})$ qui de part sa structure appartient à la seconde catégorie : $f_o^1(\bar{N})$ étant donné la décomposition possible en modes (ω, m, k,) doit être une fonction de la forme :

$$f_o^1(\bar{N}) \equiv e^{i(m\theta_o + kz_o)} \; g\,(H,\; P_\theta,\; P_z,\; r\,)\; e^{i\omega t_o} \qquad (14)\text{-IV}$$

or la trajectoire suivie est celle du mouvement non perturbé (1) et $f_o^1(\bar{N})$ est une fonction des intégrales premières soit

$$f_o^1(\bar{N}) \equiv g\,[H,\; P_\theta,\; P_z,\; r - (r(t) - r_o)]\; e^{im\,[\theta - (\theta(t) - \theta_o)] + k\,[z - (z(t) - z_o)]}$$

or connaissant le mouvement particulaire θ (t), z (t), r (t) (18)-II on peut mettre $f_o^1(\bar{N})$ sous la forme du produit d'une série de Fourier sur le temps de pulsation fondamentale ω_c par l'exponentielle

$$e^{i(m\omega_r + k\nu)(t_o - t)}$$

soit

$$f_o^1(\bar{N}) \equiv \sum_n e^{i\omega t} g_n(r,\; \bar{w})\; e^{i(m\theta + kz)}\; e^{i(\omega t + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)(t_o - t)}$$

où l'on fait rentrer artificiellement la fréquence ω de l'onde par un produit $e^{i\omega t}\, e^{-i\omega t}$:

$$\boxed{f_o(\bar{N}) = \sum_n e^{i(\omega t + m\theta + kz)}\; g_n(r,\; \bar{w})\; e^{i(\omega + n\omega_c + m\omega_r + kz)(t_o - t)}} \qquad (15)\text{-IV}$$

La formule 25 se présente donc sous une forme analogue à la formule des termes d'oscillations libre dans l'expression du gain d'énergie d'une particule (équation 10).

Par un calcul analogue on peut mettre les termes

$$(E_{1z}(t) - E_{1z}(o)) \quad \text{ou} \quad (r\,E_{1\theta}(t) - r_o\,E_{1\theta}(o))$$

sous la forme :

$$\boxed{E_{1z}(t) - E_{1z}(o) \equiv e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \left[\sum_n \varepsilon_{nz}(r)\; (1 - e^{i(\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)(t_o - t)})\right]} \qquad (16)\text{-IV}$$

On peut démontrer que l'on a l'identité suivante :

$$\sum_n \varepsilon_n(r) \equiv \bar{E}(r)\ ;$$

en définitive la fonction de distribution s'écrit de la manière suivante où l'on décompose les termes d'oscillations libres et ceux d'oscillations forcées :

$$f_1(\bar{r}, \bar{w}, t) = \sum_n e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \left[\mathcal{F}_n - \mathcal{F}_n^o \, e^{i(\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)(t_o - t)} \right] \qquad (17)\text{-IV}$$

équation dans laquelle $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{F}_n^o$ sont des fonctions ne dépendant que de r, H, P_θ et Pz résultant d'opérations linéaires portant sur la dépendance radiale du champ électrique et les distributions à l'origine

(18)-IV

$$\mathcal{F}_n \equiv -\left(\frac{\partial f_o}{\partial H} - \frac{m}{\omega} \frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} - \frac{k}{\omega} \frac{\partial f_o}{\partial P_z} \right) \frac{A_n}{i(\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)} - \frac{q}{i\omega} \left[r E_\theta(r) \frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} + E_z(r) \frac{\partial f_o}{\partial P_z} \right] \delta_{on}$$

où δ_{on} est le symbole de Kronecker

(19)-IV

$$\mathcal{F}_n^o \equiv -\left(\frac{\partial f_o}{\partial H} - \frac{m}{\omega} \frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} - \frac{k}{\omega} \frac{\partial f_o}{\partial P_z} \right) \frac{A_n}{i(\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)} - \frac{q}{i\omega} \left[r \varepsilon_{n\theta} \frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} + \varepsilon_{nz} \frac{\partial f_o}{\partial P_z} \right] + g_n(r, \bar{w})$$

en se souvenant que $\mathcal{F}_n^o$ et $\mathcal{F}_n$ sont reliés par l'égalité suivante :

$$\sum_n (\mathcal{F}_n) = \sum_n (\mathcal{F}_n^o - g_n(r, \bar{w})) \qquad (19')\text{-IV}$$

On peut aussi remarquer que lorsqu'il y a résonance chacun des deux termes diverge mais que $f_1(\bar{r}, \bar{w}, t)$ reste fini dans la mesure où $g_n(r, \bar{w})$ reste toujours une fonction bornée : ce qui signifie que la perturbation initiale de la fonction de distribution n'est pas une fonction δ sur les particules résonantes. Dans le cas où il en serait ainsi, les conclusions que l'on pourra tirer sur l'amortissement Landau devront être révisées.

Dans un certain nombre de cas on pourra simplifier la fonction de distribution perturbée et ne retenir que le terme correspondant aux oscillations forcées ($\mathcal{F}_n$) en particulier dans les deux cas suivants :

a) onde croissante (ω complexe)

b) présence d'un taux de collision suffisant.

a) Cas de l'onde croissante :

$$\omega = \omega_o - i\gamma$$

Lorsque ω est complexe il n'existe plus de pôle pour $\mathcal{F}_n$ ou $\mathcal{F}_n^o$ et ces deux termes restent bornés dans tout l'espace des phases,or dans l'expression de $f_1(\bar{r}, \bar{w}, t)$ il intervient la différence

$$\mathcal{F}_n - \mathcal{F}_n^o \, e^{\gamma(t_o - \tau)} \, e^{i(\omega_o + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)(t_o - t)}$$

avec $t - t_o > 0$, t_o étant l'instant initial ; il s'ensuit qu'après un certain temps, le terme $e^{-\gamma(t - t_o)}$ devient suffisamment petit pour que l'on puisse négliger les termes dépendant du temps devant $\mathcal{F}_n$ (les conditions initiales disparaissent). La fonction de distribution perturbée se réduit à :

$$f_1(\bar{r}, \bar{w}, t) \simeq e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \sum_n \mathcal{F}_n \qquad (20)\text{-IV}$$

on peut aussi remarquer que dans le cas d'une onde décroissante le raisonnement ne peut plus être fait : les conditions initiales jouent en l'absence de collisions un rôle qui reste toujours primordial.

b) Cas des collisions : ce cas est à rapprocher du précédent ; les collisions amortissent les conditions initiales. Afin de pouvoir faire un calcul approximatif du phénomène on utilisera un modèle simplifié pour représenter une collision :

La collision sera décrite comme étant un phénomène rendant la phase du mouvement forcé de la particule aléatoire au bout d'un temps τ. On négligera dans une telle description les phénomènes faisant intervenir la conservation de l'énergie ou des moments (échauffement du plasma, viscosité , résistivité, etc) . On supposera de plus la collision brève : schématiquement au bout d'un temps τ

la particule verra à la suite d'une collision sa contribution à la perturbation de la fonction de distribution s'annuler. La probabilité d'une collision sera indépendante du temps (au moins sur un temps τ).

Ce phénomène se traduit par le fait que l'instant initial t_o est aléatoire sur une période de temps égale à l'intervalle de temps séparant deux collisions.

Soit

$$\bar{f}_1(\bar{r}, \bar{w}, t) = \int_{t-\tau}^{t} \frac{dt_o}{\tau} f_1(\bar{r}, \bar{w}, t) = e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \sum_n \left[\mathcal{F}_n - \mathcal{F}_n^o \int_{-\tau}^{o} \frac{ds}{\tau} e^{i(\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)s} \right] \quad (21)\text{-IV}$$

On peut calculer directement l'intégrale de l'équation (21) et obtenir, compte tenu du fait que $f_o^1(\bar{N}) = 0$ et en utilisant l'égalité (19') :

$$\bar{f}_{1\tau}(\bar{r}, \bar{w}, t) = e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \sum_n \mathcal{F}_n^o \left(1 + \frac{e^{-i(\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)\tau} - 1}{i(\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)\tau} \right) \quad (22)\text{-IV}$$

Lorsque

$$\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu = 0$$

le facteur de $\mathcal{F}_n^o$ s'annule et la fonction de distribution $\bar{f}_1(\bar{r}, \bar{w}, t)$ reste toujours finie.

$\mathcal{F}_n^o$ présente un pôle pour

$$\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu = 0$$

mais le produit $\mathcal{F}_n^o (\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)$ est une fonction finie.

On va montrer que la fonction

$$C \equiv (\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)^{-1} \left[1 + \frac{e^{-i(\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)\tau} - 1}{i(\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)\tau} \right]$$

est aussi une fonction bornée dans la mesure où τ est fini: en effet ;

$$\mathcal{R}e(iC) \equiv \frac{\cos[(\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)\tau] - 1}{(\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)^2 \tau^2} \tau$$

tend vers $-\frac{\tau}{2}$ lorsque $(\omega + n\omega_c + n\omega_r + k\nu) \longrightarrow 0$ et,

$$\mathcal{I}_m(iC) \equiv \frac{i - \sin(\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)\tau + (\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)\tau}{(\omega + n\omega_c + m\omega_r + m\omega_r + k\nu)^2 \tau^2}$$

tend vers

$$i(\omega + m\omega_c + m\omega_r + k\nu)\frac{\tau}{6}$$

lorsque

$$\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu \longrightarrow 0$$

Ces deux fonctions sont bien connues et donnent des courbes analogues à la diffraction d'un réseau en optique (fig. 1-IV). La partie réelle de cette fonction tend vers la fonction

$$\pi \delta(\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)$$

lorsque $\tau \longrightarrow \infty$ alors que la partie imaginaire tend vers

$$\frac{i}{\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu}$$

avec une prescription du type "Partie principale" pour la résonance.

Afin de mieux montrer l'analogie des collisions et du fait de prendre une onde croissante on peut supposer aussi que τ est donné par une loi de probabilité de la forme $\mu^2 \tau\ e^{-\mu T}$, μ représentant alors une fréquence moyenne de collision :

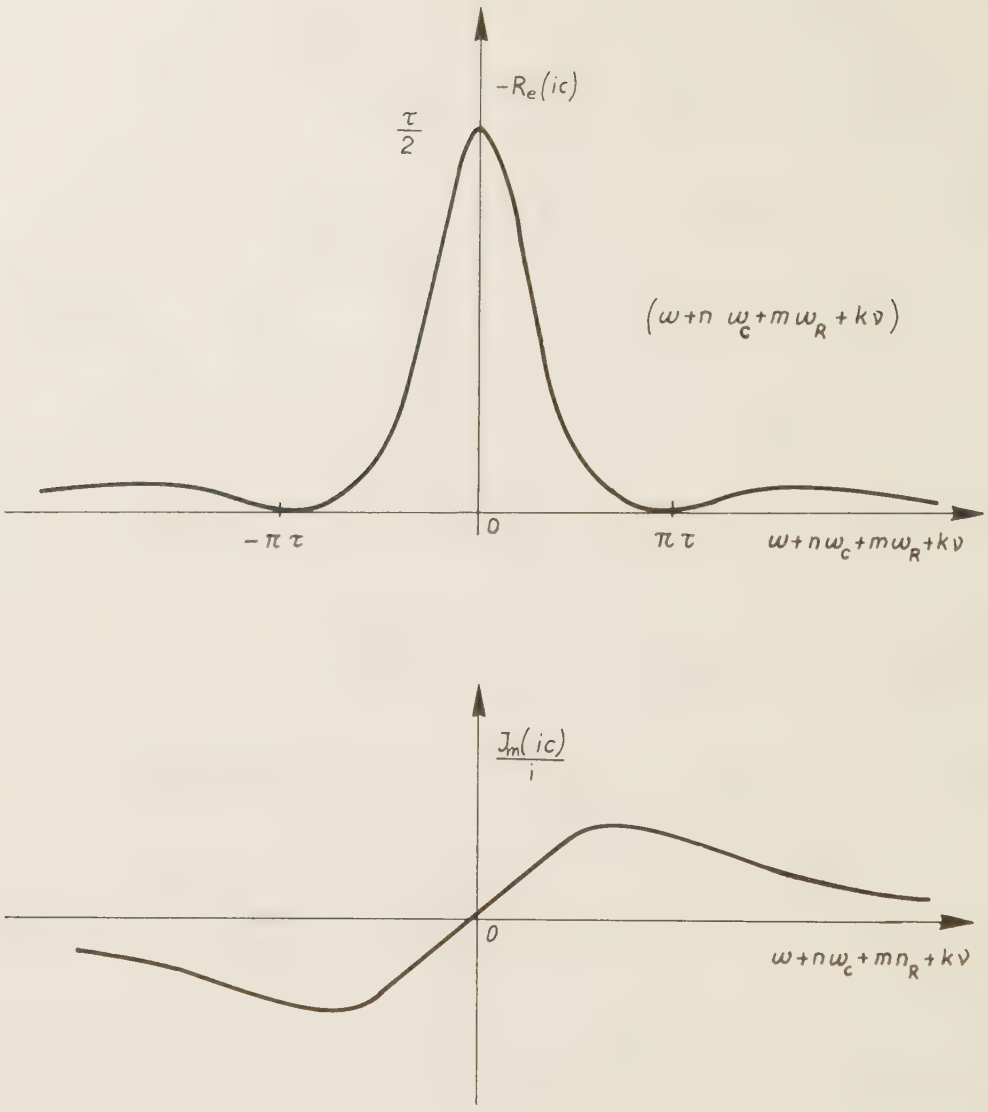


Fig. 1-IV

dans ce cas on obtient après intégration de

$$\int \mu^2 \tau\, e^{-\mu\tau}\, dt\, f_{1\tau}(\bar{r}, \bar{w}, t) = \bar{f}_1(\bar{r}, \bar{w}, t)$$

$$\boxed{\bar{f}_1(\bar{r},\ \bar{w},\ t) = e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \sum_n \mathcal{F}_n^o \frac{i(\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)}{i(\omega - i\mu + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)}} \qquad (23)\text{-IV}$$

Pour la résonance tout se passe lorsque ω est réel (ou légèrement amortie) comme si l'on avait ajouté à la fréquence ω une partie complexe-$i\mu$ correspondant à une onde croissante. Les collisions ont pour rôle d'amortir les conditions initiales.

Dans la suite on utilisera en général la formule (20) avec sa condition de validité : ω est complexe et correspond à une onde croissante, ce qui lève toutes les ambiguités dues à la présence possible d'un pôle.

2/ Etude de la fonction de distribution au voisinage d'une résonance

Ainsi qu'il vient d'être spécifié nous prendrons une onde légèrement croissante ($\omega = \omega_o - i\gamma$) au bout d'un temps assez grand pour que les conditions initiales n'interviennent plus.

La résonance au sens strict n'existe plus,mais par extension on dira qu'il y a résonance pour $\omega_o + n\omega_c + m\omega_r + k\nu = 0$ (ou par comparaison avec le cas où il y a des collisions): $\mathcal{F}_n$ deviendra grand ; et pour savoir ce qu'il se passe on séparera partie réelle et partie imaginaire de

$$\frac{1}{\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu} = \frac{\omega_o + n\omega_c + m\omega_r + k\nu + i\gamma}{(\omega_o + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)^2 + \gamma^2} \qquad (24)\text{-IV}$$

Cette séparation donne les courbes de la figure 2-IV lorsque

$$\omega_o + n\omega_c + m\omega_r + k\nu \quad \text{varie}$$

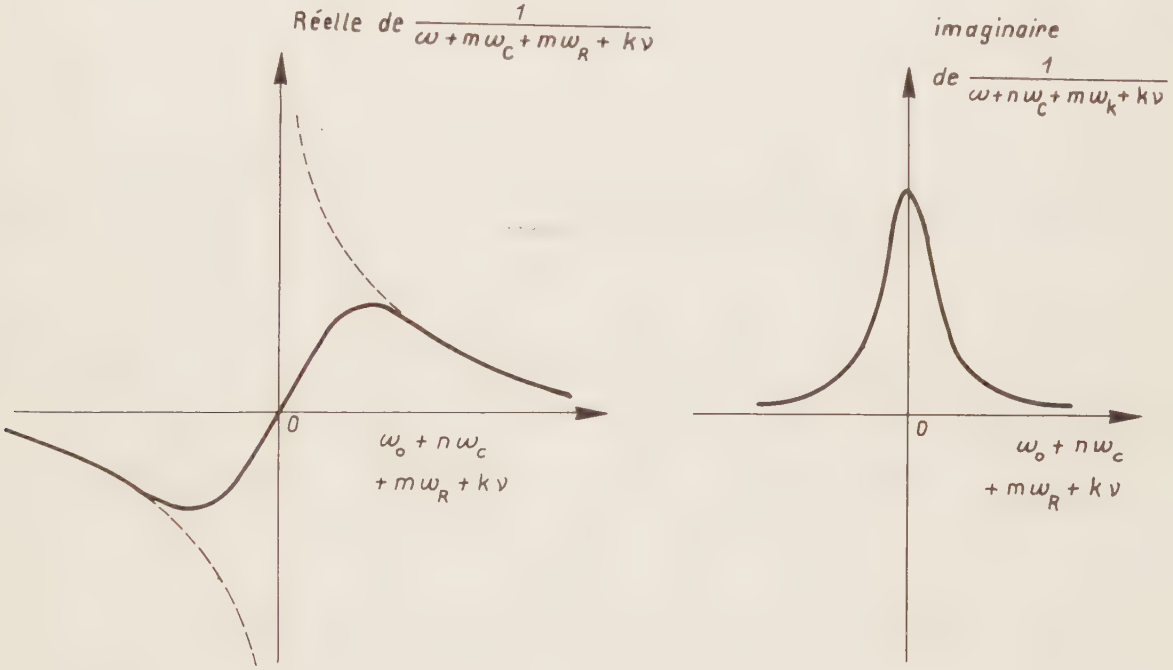


Figure 2-IV

lorsque γ devient très petit les deux courbes précédentes se déforment : la partie réelle tend vers

$$\frac{1}{\omega_o + n\omega_c + m\omega_r + k\nu}$$

mais avec une prescription pour

$$\omega_o + n\omega_c + m\omega_r + k\nu = 0 :$$

l'intégration doit se faire au sens de la partie principale.

La partie imaginaire tend vers la distribution

$$\pi\delta(\omega_o + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)$$

Ce dernier terme correspondra à une puissance moyenne absorbée ou émise (échangée avec l'onde) par les particules résonantes : pour cela il faudra calculer le courant $\bar{J}$ créé par l'onde puis l'énergie absorbée par le milieu $\int_v \bar{E}_1 \cdot \bar{J}\, d^3r$

3/ Calcul de l'énergie absorbée par le milieu (ou émise)

On reprendra les calculs généraux et l'on définira l'énergie $\mathcal{E}$ absorbée par espèce de particule.

Le courant J pour une espèce sera

$$\bar{J} = q \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{w}\ f_1\ (\bar{r},\ \bar{w},\ t)\ d^3w \qquad (25)\text{-IV}$$

avec f_1 donné par l'équation (13). La puissance absorbée ou émise par le milieu, P_u à un temps t, est donné par l'intégrale de volume suivante :

$$P_u \equiv \int_v dv\ \bar{E}_p\ .\ \bar{J} = \int_v d^3r \int_{-\infty}^{-\infty} \quad q\ (\bar{E}_p\ .\ \bar{w})\ f_1\ (\bar{r},\ \bar{w},\ t)\ d^3w \qquad (26)\text{-IV}$$

la formule (26) s'entendant pour des champs électriques réels (l'indice p signifiant qu'il s'agit d'une grandeur réelle).

Pour obtenir l'énergie absorbée par le milieu $\mathcal{E}$ il suffit d'intégrer la formule (26) sur le temps :

$$\mathcal{E} = \int_{to}^{t} dt\ P_u\ (t) \equiv \int_{to}^{t} dt \int_v d\,r \int_{-\infty}^{+\infty} d^3w\ \ q\bar{w}\ .\ \bar{E}_p\ f_1\ (\bar{r},\ \bar{w}, t) \qquad (27)\text{-IV}$$

Une remarque que l'on peut faire est qu'une partie de cette intégration ressemble beaucoup à la variation d'énergie à l'ordre 1 d'une particule :

$$\Delta H_p = \int_{t_o}^{t} dt\ q\ \bar{w}\ .\ \bar{E}_p$$

Pour mettre en évidence les formes quadratiques nécessaires au calcul de $\mathcal{E}$ on séparera f_1 en deux termes qui seront intégrés séparément l'un avec des variables d'Euler et l'autre avec des variables de Lagrange. Cette décomposition suppose évidemment le confinement des particules dans le volume considéré.

$f_1\ (\bar{r},\ \bar{w},\ t)$ sera donc séparé en deux termes, l'un contenant ΔH et l'autre les champs électriques azimutaux et longitudinaux :

$$\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_a + \mathcal{E}_b$$

avec

$$\mathcal{E}_a = -\int_{to}^{t} dt \int dr^3\ d^3w\ q\ \bar{w}\ .\ \bar{E}_p \left[\frac{\partial f_o}{\partial H} - \frac{m}{\omega} \frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} - \frac{k}{\omega} \frac{\partial f_o}{\partial P_z} \right] \Delta H$$

(dans la mesure ou ω est réel, sinon il faut la somme de termes compl. conj.)

$$\mathcal{E}_b = -\int_{to}^{t} dt\ d^3r\ d^3w\ q\ \bar{w}\ .\ \bar{E}_p \left[r\ \frac{(E_{1\theta} - E_{1\theta}^*)}{i\omega} \frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} + \frac{(E_{1z} - E_{1z}^*)}{i\omega} \frac{\partial f_o}{\partial P_z} \right]$$

en exprimant $\bar{E}$ en termes d'ondes :

$$2\,\bar{E}_p = \bar{E}\ (r)\ e^{i(\omega t + m\theta + kz)} + \bar{E}^*\ (r)\ .\ e^{-i(\omega^* t + m\theta + kz)}$$

on trouvera sous les signes $\int$ les divers termes fonction de r, t, $\bar{w}$ multipliés par l'une des trois exponentielles suivantes :

$$e^{i(\omega - \omega^*)t} \equiv e^{2\gamma t}$$

$$e^{2i(\omega t + m\theta + kz)}$$

$$e^{-2i(\omega^* t + m\theta + kz)}$$

il est évident que l'intégration en θ ou en z annulera les termes multipliés par les 2 dernières exponentielles.

On aura donc

$$\mathcal{E}_a = -\frac{1}{4}\int_{t_o}^{t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d^3r\, d^3w \left\{ q\,\bar{w}\,.\,\bar{E}(t') \left[\frac{\partial f_o}{\partial H} - \frac{m}{\omega}\frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} - \frac{k}{\omega}\frac{\partial f_o}{\partial P_z} \right] \Delta H(t') + \text{comp. conj.} \right\} \tag{28}\text{-IV}$$

$$\mathcal{E}_b = -\frac{1}{4}\int_{t_o}^{t} dt\; e^{2\gamma t} \int d^3r\, d^3w\; q^2 \left[(\bar{w}\,.\,\bar{E}_1(r)) \left(\frac{r E_{1\theta}^*}{-i\omega^*}\frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} + \frac{E_{1z}^*}{-i\omega^*}\frac{\partial f_o}{\partial P_z} \right) + \text{comp. conj.} \right] \tag{29}\text{-IV}$$

γ sera supposé petit et l'on décomposera $\mathcal{E}_a$ et $\mathcal{E}_b$ en ordres successifs en γ de la forme (30)

$$\mathcal{E} = e^{2\gamma t}\left(\frac{\alpha_o}{\gamma} + \alpha_1 + \alpha_2\,\gamma \right) \tag{30}\text{-IV}$$

La puissance absorbée sera :

$$P_u = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = e^{2\gamma t}\,(2\,\alpha_o + 2\,\alpha_1\,\gamma + 2\alpha_2\,\gamma^2 + \ldots\ldots) \tag{31}\text{-IV}$$

or le terme $e^{2\gamma t}$ est proportionnel à l'énergie de l'onde.

La puissance relative absorbée ($e^{-2\gamma t} P_u$) pourra donc comprendre un terme indépendant du taux de croissance de l'onde ($2\alpha_o$) ou du taux de collisions ; on montrera que ce terme correspond à l'énergie absorbée par les particules résonantes. Les termes suivants sont des termes normaux proportionnels au taux de croissance de l'onde ou à la fréquence de collision.

On calculera donc à l'ordre le plus petit P_u ou $\mathcal{E}$:

Le terme $\mathcal{E}_b$ n'apporte pas de contribution à l'ordre 0 à P_u :

Pour montrer cela il suffit de décomposer $\bar{w}\,.\,\bar{E}_1$

$$\bar{w}\,.\,\bar{E}_1 = w_r\,E_{1r} + w_\theta\,E_{1\theta} + w_z\,E_{1z}$$

et d'utiliser les identités :

$$\int \left(r\,w_z \frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} - w_\theta \frac{\partial f_o}{\partial P_z} \right) d^3w = 0$$

$$\int d^3w\; w_r r \frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} = \int d^3w\; w_r \frac{\partial f_o}{\partial P_z} = 0$$

Par contre, il n'en sera pas de même pour le terme $\mathcal{E}_a$.

Afin de faire apparaître les propriétés d'hermiticité ou d'antihermiticité des opérateurs, nous ferons un changement de variables d'intégration : l'intégrale est exprimée en variables d'Euler $\bar{w}$, $\bar{r}$, t' qui n'ont pas de signification pour la particule. On obtiendra une expression symétrique en utilisant les variables de Lagrange de la trajectoire non perturbée : $\bar{w}'$, $\bar{r}'$, t'

$$(\bar{w}'\,[\bar{w}, \bar{r}, t']\;;\; \bar{r}'\,[\bar{w}, \bar{r}, t]) :$$

cela revient à calculer l'absorption d'énergie (ou l'inverse) due à chaque particule et à faire la sommation. Le jacobien de la transformation étant égal à 1 (théorème de Liouville), l'intégrale peut s'écrire

$$\mathcal{E}_a = -\frac{1}{4}\int d^3r\, d^3w \left[\int_{t_o}^{t} dt'\; \bar{w}'\,.\,\bar{E}_1(\bar{r}', t)\; \Delta H^*(t') \left[\frac{\partial f_o}{\partial H} - \frac{m}{\omega^*}\frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} - \frac{k}{\omega^*}\frac{\partial f_o}{\partial P_z} \right] + \text{comp. conj.} \right]$$

ce qui donne par intégration par partie.

$$\mathcal{E}_a = \frac{1}{4}\int d^3r\, d^3w \left[\int_{t_o}^{t} dt'\; \Delta H(t')\; q\,\bar{w}'.\bar{E}_1^*(\bar{r}', t') \left(\frac{\partial f_o}{\partial H} - \frac{m}{\omega^*}\frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} - \frac{k}{\omega^*}\frac{\partial f_o}{\partial P_z} \right) + \text{comp. conj.} \right]$$

$$-\frac{1}{4}\int d^3r\, d^3w\; \Delta H\; \Delta H^* \left[2\frac{\partial f_o}{\partial H} - \left(\frac{m}{\omega^*} + \frac{m}{\omega} \right)\frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} - \left(\frac{k}{\omega^*} + \frac{k}{\omega} \right)\frac{\partial f_o}{\partial P_z} \right]$$

Si l'on recherche uniquement l'ordre le plus bas en γ on a :

$$(1 + \mathcal{O}(\gamma))\ \mathcal{E}_a = -\frac{1}{4}\int d^3r\ d^3w\ \Delta H\ \Delta H^* \left(\frac{\partial f_o}{\partial H} - \frac{m}{\omega_o}\frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} - \frac{k}{\omega_o}\frac{\partial f_o}{\partial P_z}\right) \qquad (32)\text{-IV}$$

soit (les termes du type $A_n A_n^*$ dépendent des "phases" que l'interaction dans l'espace des vitesses fait disparaitre)

$$\mathcal{E}_a\ (1 + \mathcal{O}(\gamma)) = \frac{-1}{4}\int d^3r\ d^3w \sum_n \frac{A_n A_n^*\ e^{2\gamma t}}{\gamma^2 + (\omega_o + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)^2}\left(\frac{\partial f_o}{\partial H} - \frac{m}{\omega_o}\frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} - \frac{k}{\omega_o}\frac{\partial f_o}{\partial P_z}\right) \qquad (32')\text{-IV}$$

donc

$$P_u\ (1 + \mathcal{O}(\gamma)) = \frac{-e^{2\gamma t}}{2}\int d^3w\ d^3r \sum_n \frac{\gamma\ A_n A_n^*}{\gamma^2 + (\omega_o + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)^2}\left(\frac{\partial f_o}{\partial H} - \frac{m}{\omega_o}\frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} - \frac{k}{\omega_o}\frac{\partial f_o}{\partial P_z}\right)$$

ce qui donne dans la limite où $\gamma \longrightarrow 0$.

$$(e^{-2\gamma t}\ P_u) = -\frac{1}{2}\int d^3w\ d^3r \sum_n A_n^*\ A_n\ \pi\delta\ (\omega_o + n\omega_c + m\omega_r + k\nu)\left[\frac{\partial f_o}{\partial H} - \frac{m}{\omega}\frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} - \frac{k}{\omega}\frac{\partial f_o}{\partial P_z}\right] \qquad (33)\text{-IV}$$

Il est facile de voir sur les formules (32) ou (33) que l'énergie absorbée par le milieu est due aux particules résonantes : nous avons une absorption particulaire due au fait que ces particules voient l'amplitude du mouvement forcé croître avec le temps. Cet effet (effet Landau, absorption cyclotronique) est général, et est lié à la présence et à la distribution de ces particules. On conçoit facilement qu'en changeant les conditions initiales (fonction δ sur ces particules) on peut obtenir des ondes de ce type dans un état stationnaire (limitation de chauffage, ondes stationnaires sans absorption Landau, effets non linéaires etc.) (Une onde croissante est compatible avec une absorption dans la mesure où elle provient de l'extérieur, chauffage par exemple).

Macroscopiquement cet effet se présente comme une résistivité positive ou négative du milieu : l'absorption n'est pas localisée dans l'espace et est proportionnelle à l'énergie électrique (les termes $A_n A_n^*$ sont proportionnels à $\bar{E}\,\bar{E}^*$). De plus cet effet est général dans tous les plasmas (ou autres systèmes de particules où il peut exister des résonances).

Avec ce formalisme on a été capable d'obtenir la fonction de distribution perturbée, donc les grandeurs macroscopiques qui lui sont liées et de montrer la généralité des effets du type Landau ainsi que de calculer l'absorption correspondante du milieu. La partie B se rapportera au calcul explicite des coefficients A_n lorsque les gradients à l'équilibre sont faibles.

B - APPLICATION AU CAS DES PETITS RAYONS DE LARMOR

Dans cette partie il s'agit uniquement de calculer les coefficients des divers harmoniques A_n en utilisant l'approximation des petits rayons de Larmor. On aura donc une valeur approchée de ces coefficients mais on ne changera absolument pas les phénomènes essentiels : on n'introduira pas de phénomènes nouveaux, on ne supprimera pas non plus de phénomènes existants.

Les calculs de cette partie seront uniquement consacrés à calculer des valeurs approchées d'intégrales et donc relativement fastidieux c'est pourquoi certains calculs intermédiaires ne seront pas donnés.

A l'équilibre le mouvement à l'ordre 1 d'une particule sera donné par les équations suivantes :

$$w_b = w_b$$

$$w_r' = +\,a\,\omega_c\,\cos\,[\omega_c\,(t' - t) + \varphi] \qquad (34)\text{-IV}$$

$$w'_c = + a\ \omega_c \sin\ [\omega_c\ (t' - t) + \varphi]$$

$$r' = r + a\ \{\sin\ [\omega_c\ (t' - t) + \varphi] - \sin\ \varphi\} \qquad (34)\text{-IV}$$

t' représentant le temps courant et t l'instant d'observation, a le rayon de Larmor, l'indice c la composante du vecteur normale au champ magnétique de vecteur unitaire $\overline{e}_b$ et au vecteur radial $\overline{e_r}$

$$\overline{e}_c \equiv \overline{e}_r \times \overline{e}_b \qquad (34\text{bis})\text{-IV}$$

Pour le calcul des coefficients A_n la vitesse de dérive n'intervient pas (elle est explicitement exclue des formules (11)). Par contre pour le calcul du dénominateur (résonances) elles seront nécessaires et en utilisant les formules (23)-II du mouvement individuel à l'équilibre on obtient pour celui-ci au rayon r

$$\boxed{\begin{aligned} &\omega + n\omega_c + m\omega_r + k\nu = \\ &\omega + n\left(\frac{qB}{M} - \frac{E'}{2B}\right) - \frac{nqB'}{M}\ a\ \sin\ \varphi + \frac{n w_b}{2}\left[\frac{B_z\ B'_\theta - B_\theta B'_z}{B^2} + \frac{3 B_z B_\theta}{B^2 r}\right] \\ &\quad + k_b\ w_b + k_c\ w_D \end{aligned}} \qquad (35)\text{-IV}$$

avec

$$k_b \equiv \left(\frac{m}{r}\ \overline{e}_\theta + k\ \overline{e}_z\right) \cdot \overline{e}_b, \qquad k_c \equiv \left(\frac{m}{r}\ \overline{e}_\theta + k\ \overline{e}_z\right) \cdot \overline{e}_c$$

Dans la formule (35) on peut dénombrer quatre types de termes :

1/ des termes indépendants de la vitesse de la particule :

$$\omega + n\left(\frac{qB}{m} - \frac{E'}{2B}\right)$$

2/ des termes proportionnels à la vitesse parallèle de la particule

$$\left[n\left(\frac{B_z\ B'_\theta - B_\theta B'_z}{2B^2} + \frac{3\ B_z\ B_\theta}{2B^2 r}\right) + k_b\right] w_b$$

3/ des termes proportionnels à w_c (ou dépendant du rayon de Larmor)

$$\frac{n\omega'_c}{\omega_c}\ w_c$$

4/ des termes proportionnels à w^2 provenant des vitesses de dérive qui peuvent jouer un rôle prépondérant dans les études de stabilité.

Les deux premiers types de terme existent déjà pour des plasmas homogènes ; le troisième est directement une conséquence de l'inhomogénéité et peut correspondre à une absorption cyclotronique (ou sur les harmoniques) en propagation purement perpendiculaire d'une onde électromagnétique. Le dernier peut être responsable d'une série d'instabilités.

Calcul du coefficient A_n

Pour ce calcul plutôt que les coordonnées définies par les vecteurs $\overline{e}_b$, $\overline{e}_r$ et $\overline{e}_c$ on utilisera les coordonnées correspondant à des coordonnées rotatoires :

$$\overline{e}_b \equiv \overline{e}_b, \qquad \overline{e}_\mu \equiv \left(\frac{e_r - i\,e_c}{2}\right) \qquad \overline{e}_\nu \equiv \left(\frac{\overline{e}_r + i\,\overline{e}_c}{2}\right) \qquad (36)\text{-IV}$$

et un vecteur $\overline{B}$ sera défini par l'identité

$$\overline{B} \equiv B_\mu\ \overline{e}_\mu + B_\nu\ \overline{e}_\nu + B_b\ \overline{e}_b$$

et l'on posera par définition

$$A_n \equiv X_{nb}\ E_b - X_{n\nu}\ E_\nu + X_{n\mu}\ E_\mu \qquad (37)\text{-IV}$$

les X_n étant des opérateurs agissant sur la dépendance radiale des composantes du champ électrique de l'onde.

En utilisant la formule de définition des A_n on obtient (11)

$$\left\{\begin{array}{l} X_{nb} E_b = \oint \frac{\omega_c}{2\pi} dt' \, q \, w_b E_b (r') \exp \{ - ik_c a [\cos (\omega_c (t' - t) + \varphi) - \cos \varphi] - in\omega_c (t' - t)\} \\ \qquad = \oint \frac{d\tau}{2\pi} q \, w_b E_b (r') \exp [- ik_c a (\cos \tau - \cos \varphi) - in (\tau - \varphi)] \\ X_{n\mu} E_\mu = \frac{1}{2} \oint \frac{d\tau \omega_c}{2\pi} q \, a \, E_\mu (r') \exp [-ik_c a (\cos \tau - \cos \varphi) - i(n+1)(\tau - \varphi) - i\varphi] \\ X_{n\nu} E_\nu = \frac{1}{2} \oint \frac{d\tau \omega_c}{2\pi} q \, a \, E_\nu (r') \exp [- ik_c a (\cos \tau - \cos \varphi) - i(n-1)(\tau - \varphi) + i\varphi] \end{array}\right. \qquad (38)\text{-IV}$$

formules dans lesquelles

$$\left\{\begin{array}{l} k_c \equiv \left(\frac{m \bar{e}_\theta}{r} + k \bar{e}_z \right) . \; \bar{e}_c = \frac{kr B_\theta - m B_z}{r B} \\ \tau \equiv \omega_c (t' - t) + \varphi \end{array}\right. \qquad (39)\text{-IV}$$

on peut remarquer que les formules (38) sont liées entre elles par les identités suivantes entre opérateurs :

$$\boxed{\frac{X_{nb}}{2w_b} \equiv \frac{X_{(n-1)\mu}}{w_\nu} \equiv \frac{X_{(n+1)\nu}}{w_\mu}} \qquad (40)\text{-IV}$$

Afin de continuer le calcul on exprimera E (r') en fonction du champ électrique final E(r) et du mouvement particulaire en utilisant la formule de Taylor ou plutôt sa forme symbolique moyennant une convergence suffisante :

$$E (r') \equiv E [r - (r - r')] = e^{(r' - r)\frac{\partial}{\partial r}} E (r)$$

ce qui s'écrit en utilisant les équations du mouvement (34)

$$\boxed{E (r') = e^{-i(\sin \tau - \sin \varphi) ia \frac{\partial}{\partial r}} E (r)} \qquad (41)\text{-IV}$$

$i \frac{\partial}{\partial r}$ représentant symboliquement le nombre d'onde radial

On obtient donc

$$\boxed{\frac{X_{nb}}{q w} = \oint \frac{d\tau}{2\pi} \exp - i \left[i a \frac{\partial}{\partial r} (\sin \tau - \sin \varphi) + a k_c (\cos \tau - \cos \varphi) + n (\tau - \varphi) \right]} \qquad (42)\text{-IV}$$

(N.B. Dans tous les calculs qui suivent et la formule (42), la dérivation $\frac{\partial}{\partial r}$ ne s'applique qu'aux champs électriques et non à la dépendance radiale des autres grandeurs).

En posant

$$\boxed{\frac{i \partial}{k_c \partial r} \equiv \operatorname{cotg} \chi} \qquad (43)\text{-IV}$$

et en utilisant la décomposition en fonction de Bessel de exp (i a sin t) on calculera X_{nb} :

$$J_n (a) = \frac{1}{2\pi} \oint e^{\pm i (nt - a \sin t)} dt$$

$$\frac{X_{nb}}{q\,w_b} = \exp i\left[a\left(\sqrt{k_c^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2}}\right)\sin(\varphi + \chi) + n(\varphi + \chi)\right] J_n\left(-a\sqrt{k_c^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2}}\right) \qquad (44)\text{-IV}$$

cette forme permet d'écrire le tenseur de conductivité $\bar{\bar{\sigma}}$ pour une espèce de particule (pour l'ensemble il suffit de sommer sur toutes les espèces)

$$\bar{J} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{E}$$

$\bar{\bar{\sigma}}$ étant un tenseur de composantes σ_{ij} (i et j étant les coordonnées b, μ, ν) définies par

(45)-IV

$$2^{\varepsilon_j^2}\sigma_{ij} = \sum_n \int d^3w\, q^2 w_i w_j^* \frac{\exp i\left[a\sqrt{k_c^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2}}\sin(\varphi + \chi) + (n + \varepsilon_j)(\varphi + \chi)\right]}{i\left(\omega + n\left(\frac{qB}{M} - \frac{E'}{2B}\right) - \frac{n\,qB'}{M}a\sin\varphi + \frac{n w_b}{L} + k_b w_b\right)} J_{(n+\varepsilon_j)}\left(-a\sqrt{k_c^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2}}\right)$$

$$\times\left[-\frac{\partial f_o}{\partial H} + \frac{m}{\omega}\frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} + \frac{k}{\omega}\frac{\partial f_o}{\partial P_z}\right]$$

$$+ \int d^3w \frac{q^2}{i\omega} w_i w_j \frac{\partial f_o}{\partial H} + \frac{q^2 2^{\varepsilon_j^2}}{M i\omega}\delta_{\varepsilon_i \varepsilon_j}\int f_o\, d^3w .$$

le facteur $2^{\varepsilon_j^2}$ vient uniquement de la définition des coordonnées rotatoires (vecteurs non unitaires) et ε_i vaut 0, 1 ou - 1 suivant que i est b, μ ou ν.

On a posé

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{B_z B'_\theta - B_\theta B'_z}{B^2} + \frac{3 B_z B_\theta}{B^2 r}\right) ;$$

$\delta_{\varepsilon_i \varepsilon_j}$ est le symbole de Kronecker, la deuxième partie des termes σ_{ij} provient, après une intégration par partie, de la fraction de f_1 ne contenant pas ΔH et ne dépend que de l'anisotropie du plasma.

On se rappelera aussi que

$$\begin{cases} w_b = w_b \\ w_\mu = a\, e^{i\varphi}\,\omega_c \\ w_\nu = a\, e^{-i\varphi}\,\omega_c \end{cases}$$

On ne peut pas à priori poursuivre l'intégration sans connaître la forme précise de l'équilibre, l'intégration générale s'arrête à cette formule. La suite du problème dépend de l'application à un cas pratique et des approximations que l'on peut faire dans ce cas. Mais avant de s'arrêter on montrera que la formule (45) redonne bien quelques cas connus en particulier en géométrie homogène.

Dans le cas de la géométrie homogène l'angle φ (coordonnée polaire de la vitesse) n'intervient pas à l'équilibre dans la fonction de distribution f_o ; cet angle n'intervient pas non plus dans la définition des résonances (B' = 0). On peut donc dans ce cas poursuivre l'intégration sur φ et obtenir pour le tenseur de conductivité en géométrie homogène :

$$2^{\varepsilon_j^2}\sigma_{ij} = \sum_n 2\pi \int a\,da\,dw_b\, q^2\omega_c^2\, w_i w_j \frac{e^{i(\varepsilon_j - \varepsilon_i)\chi} J_{(n+\varepsilon_j)} J_{(n+\varepsilon_j)}}{i(\omega + n\omega_c + k_b w_b)}\left[-\frac{\partial f_o}{\partial H} + \frac{m}{\omega}\frac{\partial f_o}{\partial P_\theta} + \frac{k}{\omega}\frac{\partial f_o}{\partial P_z}\right] \qquad (46)\text{-IV}$$

$$+ \int d^3w \frac{q^2}{i\omega} w_i w_j \frac{\partial f_o}{\partial H} + \frac{q^2}{Mi\omega} 2^{\varepsilon_j^2}\delta_{\varepsilon_i \varepsilon_j}\int f_o\, d^3w$$

J_n étant une fonction de Bessel portant sur

$$-a\sqrt{k_c^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2}} = -a\sqrt{k_c^2 + k_r^2}$$

$w_i = a\,\omega_c$ pour $i = \mu$ ou ν et $w_i = w_b$ pour $i = b$

Sur les formules (46) on retrouve bien le cas homogène ⑦ le terme $e^{i(\varepsilon_j - \varepsilon_i)\chi}$ ne provenant que du changement de repère pour les coordonnées rotatoires (dans le cas homogène plan χ est pris égal à 0).

On peut aussi se ramener au cas du plasma froid ($a \sim 0$) ce qui donne le tenseur de conductivité bien connu. L'étude complète de la propagation dans ce cas est faite dans la Vème partie. Connaissant le champ électrique en tout point on est alors capable lorsque l'on n'est pas trop près des résonances de calculer la résistivité moyenne du plasma en utilisant la formule (33)-IV.

D'autres cas sont intéressants à traiter : plasma tiède, faible fréquence, petites longueurs d'ondes, grandes longueurs d'ondes etc .... mais toutes ces approximations constituent en elles-mêmes un sujet d'étude et dépassent le cadre de ce travail.

C - CONCLUSION

On a pu calculer le tenseur de conductivité d'un plasma chaud et inhomogène en géométrie cylindrique. Les ondes que l'on peut trouver en utilisant les équations de Maxwell,

$$- i \frac{\nabla \times (\nabla \times \bar{E})}{\omega} + 4\pi \bar{E} + \frac{i\omega \bar{E}}{c^2} = 0$$

sont d'une importance primordiale pour l'étude des plasmas ; elles interviennent dans les méthodes de chauffage ou pour déterminer la stabilité du plasma.

Le calcul dans un cas particulier (stabilité) a déjà été fait en utilisant une méthode analogue [8].

On peut remarquer que le tenseur de conductivité n'est pas fondamentalement affecté par l'inhomogénéité mais qu'il est des effets que l'on ne peut prévoir avec les formules du cas homogène : les gradients jouent un rôle dans les résonances particulaires et, par exemple, une onde se propageant purement perpendiculairement au champ magnétique subit une absorption cyclotronique lorsqu'il y a un gradient de champ. Les calculs faits permettent aussi de montrer que l'absorption du type Landau est tout à fait générale et de donner la formule permettant de calculer cette absorption par le plasma, si l'on connaît la pénétration de l'onde. La formule 32 sera en particulier très utile pour la localisation des ondes instables dans un plasma et pour calculer les taux de croissance de ces ondes.

Alors que ce travail était en cours de rédaction, il est paru dans Nuclear Fusion un travail russe [9] tout à fait similaire qui correspond à ce calcul dans le cas des petits rayons de Larmor, à l'exception des formules démontrant l'absorption.

V - ONDES DANS UN PLASMA INHOMOGÈNE FROID RÉSONANCES COLLECTIVES

A - INTRODUCTION

Les plasmas froids représentent une bonne approximation pour traiter la propagation des ondes en dehors des résonances particulaires, résonances qui peuvent alors être étudiées séparément par les équations de Vlasov (le plasma sera dit froid lorsqu'on pourra négliger les vitesses thermiques dans les équations d'onde).

Dans le cas d'un plasma homogène et infini les ondes ont été abondamment étudiées mais ces études sont insuffisantes du point de vue expérimental : [1, 10, 11].

On se propose ici de traiter les ondes pouvant se propager dans un plasma froid inhomogène, plasma dans lequel circulent des courants mais ayant une pression nulle ("plasma force-free").

Dans ce cas les équations deviennent relativement simples et le tenseur de conductibilité est algébrique.

Si les ondes considérées ont une fréquence très inférieure à la fréquence plasma, la relation de dispersion obtenue peut être mise sous la forme d'une équation de Sturm-Liouville, équation qui permet de calculer divers profils de champ électrique ou magnétique ainsi que les modes propres du plasma.

Cette équation est très proche de celle obtenue lors du calcul de la stabilité magnétohydrodynamique du même plasma. Les calculs peuvent être menés de deux manières différentes : l'une dans laquelle les inconnues sont les champs électriques, calcul sans difficulté, mais dans lequel on perd assez vite la signification des divers termes, l'autre utilisant des notations analogues à celles que l'on trouve dans les calculs de stabilité. Bien qu'un peu plus délicate, cette dernière méthode a l'avantage d'être plus compacte et de mettre en évidence la jonction entre ondes et stabilité. C'est cette dernière que nous présenterons.

B - EQUATIONS DE BASE

Les équations de base seront celles du mouvement particulaire auxquelles on adjoindra les équations de Maxwell. La particule en l'absence d'onde aura uniquement une vitesse dirigée suivant les lignes de champ (rayon de Larmor nul). La distribution des vitesses parallèles sera donnée par une fonction δ. La géométrie restera cylindrique et de révolution.

$$\frac{M}{q}\frac{d\bar{w}}{dt} = \bar{E} + (\bar{w} + \bar{V}) \times \bar{B} \qquad (1)\text{-V}$$

Equation dans laquelle $\bar{w}$ est la vitesse induite par l'onde, $\bar{V}$ la vitesse des particules à l'équilibre, $\bar{E}$ et $\bar{B}$ les champs magnétiques et électriques totaux. On négligera les forces de Coriolis et les forces centrifuges dues à la vitesse macroscopique $\bar{V}$ qui sera supposée faible.

A l'équilibre cette équation devient

$$\bar{E}_o + \bar{V} \times \bar{B}_o = 0$$

soit $\bar{E}_o = 0$ car le plasma est sans pression : la vitesse des particules est parallèle au champ magnétique.

On conserve la définition des vecteurs unitaires

$$\bar{e}_r , \bar{e}_b \text{ et } \bar{e}_c$$

$\bar{e}_r$: vecteur unitaire radial

$\bar{e}_b$: vecteur unitaire porté par le champ magnétique B_o :

$$\bar{e}_c = \bar{e}_r \times \bar{e}_b$$

Les coordonnées rotatoires autour du champ magnétique local à l'équilibre seront définies par les vecteurs unitaires

$$\bar{e}_\mu \quad \text{et} \quad \bar{e}_\nu \tag{36)-IV}$$

dans ce système de coordonnée l'équation (1) s'écrit en se limitant au premier ordre (approximation linéaire)

$$\frac{M}{q} \frac{dw_b}{dt} = E_b \tag{2)-V}$$

$$\frac{M}{q} \frac{dw_\mu}{dt} = E_\mu + iB_o \, w_\mu - iB_\mu \, V \tag{3)-V}$$

$$\frac{M}{q} \frac{dw_\nu}{dt} = E_\nu - iB_o \, w_\nu + iB_\nu \, V$$

La géométrie initiale ne dépendant que de la variable r on pourra décomposer les champs électriques et magnétiques en ondes élémentaires de la forme

$$A(r) \, e^{i(m\theta + kz + \omega t)}$$

la fréquence de l'onde étant définie par sa pulsation ω, son amplitude A (r) sera une fonction du rayon.

Dans la suite des calculs les composantes d'un vecteur seront en général les composantes de l'amplitude.

La fréquence cyclotronique sera définie par

$$\omega_{c_j} = \frac{q_j B_o(r)}{M_j}$$

les équations (2) et (3) portant sur les amplitudes se résolvent par le système suivant :

$$\omega_j \equiv \omega - k_b \, V_j \equiv \omega + \frac{m}{r} \, V_{j\theta} + k \, V_{jz} \tag{5)-V}$$

$$w_b = \frac{q}{i\omega_j M_j} E_b$$

$$\begin{cases} w_\mu = \dfrac{q}{M}\left[\dfrac{E_\mu - iB_\mu V}{i(\omega_j - \omega_c)}\right] \\ w_\nu = \dfrac{q}{M}\left[\dfrac{E_\nu + iB_\nu V}{i(\omega_j + \omega_c)}\right] \end{cases} \tag{6)-V}$$

C - CALCUL DES COURANTS ET DE L'EQUATION D'ONDE

Par définition le courant est donné par

$$\bar{J} = \sum_j n_j \, q_j \, \bar{V}_j \tag{7)-V}$$

n représentant la densité de particules d'une espèce donnée, q sa charge, V sa vitesse ; la sommation étant faite pour toutes les espèces (électrons d'indice e, et ions d'indice i).

On aura donc pour les ondes

$$\bar{J} = \sum_j \left(n_{j1}\, q_j\, \bar{V}_j + n_o\, (q_j\, \bar{w}_j)\right)$$

n_1 sera calculé en utilisant le fait que les particules sont conservées soit

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla \cdot (n_o\, \bar{w} + \bar{V}\, n_1) = 0 \qquad (8)\text{-V}$$

soit

$$i\omega\, n_1 + w_r \frac{\partial n_o}{\partial r} + n_o\, \nabla \cdot \bar{w} + \bar{V} \cdot (\nabla n_1) = 0$$

ce qui donne pour la densité perturbée

$$\boxed{n_1 = \frac{-\left(\frac{\partial_{n_o}}{\partial r} w_r + n_o\, \bar{\nabla} \cdot \bar{w}\right)}{i\left(\omega + \frac{m}{r} V_\theta + k\, V_z\right)}} \qquad (9)\text{-V}$$

en définissant les fréquences plasmas électroniques ou ioniques par

$$\omega_{P_j}^2 = \frac{4\pi\, n_o\, q_j^2\, c^2}{M_j}, \quad \omega_P^2 = \omega_{P_i}^2 + \omega_{P_e}^2$$

On obtient pour les diverses composantes du courant :

$$\boxed{4\pi\, i\, J_b\, c^2 = \sum_j \left[\frac{\omega_{pj}^2}{\omega_j} E_b + \frac{n_{j_1}}{n_o} 4\pi i\ J_{j_o}\, c^2\right]} \qquad (10)\text{-V}$$

avec

$$\bar{J}_{j_o} = n_{j_o}\, q_j\, \bar{V}_j$$

$$\boxed{\begin{aligned} c^2 4\pi i\ J_r &= \sum_j \left[\frac{\omega_{P_j}^2}{\omega_j^2 - \omega_{cj}^2}\omega_j (E_r + V_j\ B_c) + \frac{i\,\omega_{cj}^2\ \omega_{Pj}^2}{\omega_j^2 - \omega_{cj}^2}(E_c - V_j\ B_r)\right] \\ c^2 4\pi i\ J_c &= \sum_j \left[\frac{\omega_{P_j}^2}{\omega_j^2 - \omega_{cj}^2}\omega_j (E_c - V_j\ B_r) - \frac{i\,\omega_{cj}\ \omega_{Pj}^2}{\omega_j^2 - \omega_{cj}^2}(E_r + V_j\ B_c)\right] \end{aligned}} \qquad (11)\text{-V}$$

Il est à remarquer que les courants $\perp$ au champ magnétique s'expriment uniquement en fonction des champs électriques et magnétiques de l'onde, et que les expressions sont identiques à celles obtenues pour des plasmas homogènes : les particules du fait de leur vitesse quasi-nulle ignorent les inhomogénéités.

En ajoutant à ce système les équations de Maxwell on obtient un système complet d'équations différentielles.

Ce système peut être réduit à un système de deux équations différentielles couplées. Dans les calculs qui suivront on se bornera par contre à l'étude des ondes qui auront une fréquence très inférieure à la fréquence plasma: cette hypothèse revient à négliger l'inertie des électrons dans les ondes considérées. Le système d'équation pourra alors, dans ce cas, être réduit à une seule équation différentielle seconde, qui sera très voisine de l'équation que l'on peut obtenir lors de la recherche de la stabilité de ce plasma [12]. Il est normal qu'une équation permettant de calculer les ondes dans un plasma inhomogène donne aussi les limites de stabilité.

Système complet d'équations régissant l'onde

L'hypothèse de la faible inertie des électrons revient à considérer que ω_P^2 est très grand ; cette hypothèse reportée dans l'équation (10) a pour conséquence la nullité du champ électrique parallèle aux lignes de force ($E_b = 0$). Le système complet des équations est alors composé :

a) des équations de Maxwell

$$i\omega \bar{B}_1 = - \nabla \times \bar{E} \tag{12}-V$$

$$\nabla \times \bar{B}_1 = 4\pi \bar{J} + \frac{i\omega \bar{E}}{c^2} \tag{13}-V$$

b) des équations déduites du tenseur de conductibilité

$$E_b = 0 \tag{14}-V$$

$$4\pi c^2 i \quad J_r = \sum_j \left[\frac{\omega_{P_j}^2}{\omega_j^2 - \omega_{c_j}^2} \omega_j (E_r + V_j B_c) + \frac{i\omega_{c_j} \omega_{P_j}^2}{\omega_j^2 - \omega_{cj}^2} (E_c - V_j B_r) \right]$$

$$4\pi c^2 i \quad J_c = \sum_j \left[\frac{\omega_{P_j}^2}{\omega_j^2 - \omega_j^2} \omega_j (E_c - V_j B_r) - \frac{i\omega_{cj} \omega_{P_j}^2}{\omega_j^2 - \omega_{cj}^2} (E_r + V_j B_c) \right]$$

pour résoudre ce système on utilisera un formalisme analogue à celui déjà employé dans une étude sur la stabilité [8].

Ce formalisme consiste à définir le champ magnétique perturbateur par deux fonctions φ et ψ:

$$\bar{B}_1 \equiv \frac{\bar{v}}{v^2} \times \nabla \psi + \frac{\bar{v}}{v^2} \varphi \tag{15}-V$$

formule dans laquelle $\bar{v}$ est le vecteur définissant la symétrie hélicoïdale de l'onde, φ et ψ étant de la forme $\varphi_r (r) e^{i(m\theta + kz)}$ et $\psi_r (r) e^{i(m\theta + kz)}$. Dans la suite pour une simplicité d'écriture on laissera tomber l'indice r toute confusion étant sans effets

$$\bar{v} = m \bar{e}_z - k r \bar{e}_\theta \tag{16}-V$$

Ce vecteur aura pour composante parallèle et normale au champ magnétique v_b et v_c.

Il est facile de vérifier que $\nabla \cdot \bar{B}_1 = 0$ quelque soit φ et ψ.

En portant cette forme de $\bar{B}_1$ dans les équations 13 et 14 on obtient après quelques calculs vectoriels les formes suivantes pour les champs électriques et magnétiques après avoir défini les opérateurs L, Q, et S.

Définition des opérateurs :

$$L(a) \equiv \nabla \cdot v^{-2} \nabla a \equiv \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{m^2 + k^2 r^2} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right] a \tag{17}-V$$

$$Q(a) \equiv \bar{e}_c \cdot \nabla \times \frac{\bar{v} a}{v^2} = \left[v_c \frac{-2km}{v^4} + \frac{v_b}{v^2} \frac{\partial}{\partial r} \right] a \tag{18}-V$$

$$S(a) \equiv \frac{\bar{v}}{v^2} \cdot \nabla \times \bar{e}_c a \equiv \left[- v_c \frac{2km}{v^4} - \frac{\partial}{r \partial r} \frac{v_b r}{v^2} \right] a \tag{19}-V$$

Formes des champs électriques et magnétiques :

$$B_{1_r} = \frac{-i\psi}{r} = B_r \tag{20}-V$$

$$B_{1c} = \frac{v_c}{v^2} \varphi - \frac{v_b}{v^2} \frac{\partial}{\partial r} \psi = B_c \tag{21}-V$$

$$E_c = \frac{i\omega \psi}{v_c} \tag{22}-V$$

$$E_r = \omega \left[\frac{r\varphi}{v^2} + r S \left(\frac{\psi}{v_c} \right) \right] \tag{23}-V$$

$$\bar{e}_r \cdot \nabla \times B_1 = \frac{i\varphi}{r} \tag{24}-V$$

$$\bar{e}_c \cdot \nabla \times B_1 = v_c L \psi + Q \varphi \tag{25}-V$$

En exprimant les équations 13 et 11 en fonction des deux inconnues φ et ψ grâce aux équations précédentes on obtient les deux équations différentielles suivantes :

$$\frac{\varphi c^2}{r} = \alpha\left[\frac{r\varphi}{v^2} + rS\left(\frac{\psi}{v_c}\right)\right] + \chi\left[\frac{v_c}{v^2}\varphi - \frac{v_b}{v^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right] + \left(\beta + \xi\frac{v_c}{r}\right)\frac{\psi}{v_c} \qquad (26)\text{-V}$$

$$c^2 v_c\, L(\zeta) + c^2 Q(\varphi) = \frac{\psi}{v_c}\left(\alpha + \frac{\chi v_c}{r}\right) = \beta\left[\frac{r}{v^2}\varphi + rS\left(\frac{\psi}{v_c}\right)\right] - \xi\left(\frac{v_c}{v^2}\varphi - \frac{v_b}{v^2}\frac{\partial}{\partial r}\psi\right) \qquad (27)\text{-V}$$

Equations dans lesquelles les coefficients α, β, χ et ξ sont définis par :

$$\alpha = \omega^2 - \sum_j \frac{\omega_{Pj}^2\ \omega\ \omega_j}{\omega_j^2 - \omega_{cj}^2}$$

$$\beta = \sum_j \frac{\omega_{cj}\ \omega_{Pj}^2\ \omega}{\omega_j^2 - \omega_{cj}^2} \qquad (28)\text{-V}$$

$$\chi = -\sum_j \frac{\omega_j\ \omega_{Pj}^2\ V_j}{\omega_j^2 - \omega_{cj}^2}$$

$$\xi = \sum_j \frac{\omega_{cj}\ \omega_{Pj}^2}{\omega_j^2 - \omega_{cj}^2} V_j$$

Afin de ne pas alourdir inutilement les calculs on peut faire quelques hypothèses simplifiant ces coefficients, hypothèse n'affectant pas la forme des résultats. Tout d'abord on considèrera que le courant est porté par les électrons (quantité de mouvement nul du plasma), deuxièmement on se proposera d'étudier uniquement les ondes ayant une fréquence beaucoup plus petite que la fréquence cyclotronique électronique. On pourra aussi négliger les courants de déplacement. On obtient alors pour les coefficients :

$$\alpha = \omega^2\left[1 - \frac{\omega_{Pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2}\right] \simeq \frac{\omega_{Pi}^2\ \omega^2}{\omega_{ci}^2 - \omega^2}$$

$$\beta = \frac{\omega^2\ \omega_{Pi}^2\ \omega}{(\omega^2 - \omega_{ci}^2)\ \omega_{ci}} \qquad (29)\text{-V}$$

$$\chi = 0$$

$$\xi = -\frac{4\pi J_o c^2}{B_o}$$

Le système formé des équations 26 et 27 se réduit en définitive à une seule équation différentielle.

En effet de l'équation (26) on peut tirer φ en fonction de ψ et reporter cette valeur de φ dans l'équation (27). On remarquera que ce report ne changera pas l'ordre de cette équation. Des conditions aux limites telles que des parois parfaitement conductrices ne portent que sur ψ : $\psi = 0$ sur cette paroi ; l'existence des parois conductrices se traduit soit par le fait que le champ magnétique radial est nul soit par la nullité du champ électrique tangent. Ces diverses conditions s'expriment toutes de la même manière : $\psi = 0$ (équations 14, 20 et 22). En supposant l'existence d'une suite discrète de modes propres de l'ensemble plasma parois, les conditions aux limites ne portant que sur ψ l'ensemble des équations 26 et 27 doit se ramener à une seule équation différentielle seconde sur ψ, c'est bien ce que l'on peut constater.

On posera

$$U \equiv \frac{v^2 c^2}{r^2} - \left(\alpha + \frac{\chi v_n}{r}\right)$$

$$\simeq \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2\right) c^2 - \omega^2 \frac{\omega_{Pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \qquad (30)\text{-V}$$

L'équation (26) se résoud par

$$\cdot = \frac{v^2}{v_c r}\left(\frac{\beta}{U} + \frac{\xi v_c}{U r}\right)\psi + \frac{v^2\alpha}{U} S\left(\frac{\psi}{v_c}\right) \qquad (31)\text{-V}$$

En reportant cette expression on obtient pour le champ électrique radial

$$E_r = \frac{\omega}{U}\left[\left(\beta + \frac{\xi v_c}{r}\right)\frac{\psi}{v_c} + \frac{v^2 c^2}{r} S\left(\frac{\psi}{v_c}\right)\right] \qquad (32)\text{-V}$$

et pour le champ magnétique $B_{1_c} \equiv B_c$

$$B_{1_c} = \frac{\psi}{r U}\left[\left(\beta + \frac{\xi v_c}{r}\right) + r\alpha v_c S\left(\frac{1}{v_c}\right)\right] - \frac{v_b c^2}{r^2 U}\frac{\partial}{\partial r}\psi \qquad (33)\text{-V}$$

En utilisant l'identité suivante :

$$Q\ [a\ S\ (b\ \psi)] \equiv \psi Q\ [a\ S\ (b)] - \frac{1}{r b}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r v_b^2 b^2 a}{v^4}\frac{\partial}{\partial r}\psi\right) \qquad (34)\text{-V}$$

et en remplaçant φ par sa valeur tirée de l'équation (31),l'équation (27) se met sous la forme d'une équation de Strum-Liouville portant sur la fonction ψ, équation dont les solutions représentent les ondes dans le plasma :

soit :

$$\begin{aligned}
&\frac{c^2 v_c}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r}{v^2}\left(1 - \frac{v_b^2\alpha}{v_c^2 U}\right)\frac{\partial}{\partial r}\psi\right] = \\
&= \frac{c^2 v_c}{r^2}\psi - \psi c^2 Q\left[\frac{v^2\alpha}{U} S\left(\frac{1}{v_c}\right)\right] - \frac{\psi}{v_c}\left[\frac{\alpha U + \left(\beta + \frac{\xi v_c}{r}\right)^2}{U}\right] \\
&- \psi c^2 Q\ \frac{v^2}{v_c r}\left[\left(\frac{\beta}{U} + \frac{\xi v_c}{r U}\right)\right] - \psi\frac{\beta}{U}\frac{v^2 c^2}{r} S\left(\frac{1}{v_c}\right) - \psi\frac{\xi\alpha v_c}{U} S\left(\frac{1}{v_c}\right)
\end{aligned} \qquad (35)\text{-V}$$

Cette équation peut aussi être regardée comme une équation sur le champ électrique

$$E_c = \frac{i\omega\psi}{v_c}$$

soit

$$\begin{aligned}
&\frac{c^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\, r\left(\frac{\frac{v_c^2 c^2}{r^2} - \alpha}{U}\right)\frac{\partial}{\partial r} E_c = \\
&= - E_c c^2 Q\left[\frac{v^2\alpha}{U} S(1)\right] - E_c\frac{c^2 v_c}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r v_c}{v^2} + E_c\frac{\left(\frac{v_c^2 c^2}{r^2} - \alpha\right) U - \left(\beta + \frac{\delta v_c}{r}\right)^2}{U} \\
&- E_c Q\left(\frac{v^2\beta c^2}{U r}\right) - E_c v_c Q\left(\frac{\xi v^2 c^2}{r^2 U}\right) - \frac{E_c}{U}\left(\alpha\xi v_c + \beta\frac{v^2 c^2}{r}\right) S(1) \\
&- E_c\frac{\alpha\xi}{U}\frac{v_b}{v^2}\frac{\partial v_c}{\partial r}
\end{aligned} \qquad (36)\text{-V}$$

D - CARACTERISTIQUES PRINCIPALES DES EQUATIONS D'ONDE

Cette équation différentielle seconde est du type Sturm-Liouville mais avant toute tentative d'intégration, la première recherche consiste à trouver les pôles des coefficients.

Ces pôles ne peuvent exister que pour

1/ $r = 0$

2/ $v_c = 0$

3/ $U \equiv \frac{v^2 c^2}{r^2} - \alpha = 0$

4/ $I \equiv \frac{v_c^2 c^2}{r^2} - \alpha = 0$ (36 bis)-V

Nous verrons tour à tour la forme de l'équation autour de chacun des pôles. On notera qu'il n'existe pas de pôle à la fréquence cyclotronique pour $\omega = \omega_{ci}$; α, β et U deviennent infinis mais les rappports

$$\frac{\alpha}{U}, \frac{\beta}{U} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha^2 - \beta^2}{U}$$

demeurent finis.

1/ Etude des équations au voisinage de $r = 0$

Ce pôle est due à la géométrie cylindrique l'équation (35) se réduit alors à

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{m^2} \frac{\partial}{\partial r} \psi = \frac{\psi}{r^2} [1 + \Theta(r)]$$

soit

$$\psi \sim r^{\pm m}$$

l'équation

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{m^2} \frac{\partial}{\partial r} \varphi = \frac{\varphi}{r^2}$$

n'est autre que l'équation du champ magnétique dans le vide. On voit donc que pour ce pôle le plasma ne joue aucun rôle.

2/ Etude au voisinage du pôle $v_c = 0$ (équation 35).

On remarquera tout d'abord que ce pôle existe dans l'équation (35) mais n'existe pas dans l'équation (36) : E_c est régulier pour $v_c = 0$ au moins lorsque α est $\neq 0$ ($I \neq 0$).

Ce pôle pour l'équation (35) est dû au fait que le pas de l'onde est égal au pas des lignes de champ magnétique au rayon r_o où $v_c = 0$. Si à cet endroit ψ est différent de 0, l'onde induit un champ électrique parallèlement aux lignes de forces qui étant donné l'inertie nulle des électrons ou la conductibilité infinie du plasma, produit une densité de courant infinie. Mais dans un système d'équation faisant intervenir l'inertie des électrons ou la résistivité du plasma ce pôle disparait complètement du système d'équations analogue à l'équation (35) ; il est remarquable de constater que l'équation (36) donnant le champ électrique E_c est par contre régulière. On en déduit que les 2 solutions en ψ sont régulières et localement de la forme :

$$\psi_1 \sim (r - r_o), \quad \psi_2 \sim (r - r_o)^2$$

En réalité le pôle $v_c = 0$ rencontré dans les études magnétohydrodynamiques de stabilité se déplace et devient le pôle $I = 0$ pour les ondes.

3/ Etude du voisinage du pôle $U = 0$

$$U \equiv \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2}\right) c^2 - \omega^2 + \frac{\omega_{P_i}^2 \omega^2}{\omega^2 - \omega_{c_i}^2}$$

pour un k et un m fixé ce pôle n'existe pas pour les basses fréquences, c'est un pôle qui appartient uniquement aux ondes et que l'on ne trouve pas dans les études de stabilité.

Pour les plasmas usuels

$$\frac{\omega_{p_i}^2}{\omega_{c_i}^2} \gg 1$$

et ce pôle ne peut exister que pour des fréquences $\omega^2 < \omega_{c_i}^2$ correspondant à des ondes d'Alfven.

L'équation au voisinage de ce pôle est de la forme

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{(r - r_o)} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\mathcal{A}\, \psi}{(r - r_o)} + \mathcal{B}\, \psi + \mathcal{C} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \qquad (37)\text{-V}$$

équation dont une solution est régulière :

$$\psi_1 = \psi_{10} \ (r - r_o)^2 \ (1 + \ldots) \quad \text{(petite solution)} \qquad (38)\text{-V}$$

si r_o est le rayon où U = 0
L'autre solution a une singularité logarithmique et peut se mettre sous la forme

$$\psi_2 = \psi_{o_2} \left[1 + \mathcal{A} \ (r - r_o) - \left(\frac{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B} + \mathcal{C}\, \mathcal{A}}{4} \right) (r - r_o)^2 \log \ (r - r_o)^2 \ldots \right] \qquad (39)\text{-V}$$

$$\mathcal{A} = \frac{v^2 v_c}{v_b} \ S \left(\frac{1}{v_c} \right) + \frac{v^2}{v_b \, r \, \alpha} \left(\beta + \frac{\xi v_c}{r} \right) \qquad (40)\text{-V}$$

On peut remarquer que ψ ne change pas de signe au passage de U = 0 et que φ est proportionnel à $\log (r - r_o)^2$; cette valeur de ψ reportée dans les équations 22 et 23 permet de calculer la polarisation de l'onde

$$\frac{E_r}{E_c} \sim i \log \ (r - r_o)^2 \qquad (41)\text{-V}$$

la polarisation de l'onde autour du point r_o est essentiellement plane.

4/ Etude du voisinage du pôle I = 0

$$I \equiv \frac{v_c^2 \ c^2}{r^2} - \omega^2 + \frac{\omega_{p_i}^2 \ \omega^2}{\omega^2 - \omega_{c_i}^2}$$

Contrairement au pôle U ce pôle I peut exister aux basses fréquences et lorsque $\omega \longrightarrow 0$. Ce pôle correspond à celui que l'on trouve lors des études de stabilité.

Au voisinage de ce pôle ($r = r_o$) l'équation est de forme :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r - r_o} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mathcal{A}_1 \right) \psi + \mathcal{B}_1 \psi = 0 \qquad (42)\text{-V}$$

équation dont les solutions sont :

a) La solution régulière qui est aussi la petite solution

$$\psi_1 = \psi_{1_o} \ [1 + \mathcal{A}_1 \ (r - r_o) + \ldots\ldots] \qquad (43)\text{-V}$$

b) La solution non régulière

$$\psi_2 = - \psi_{2_o} \left[\left(\frac{1}{2} + \mathcal{A}_1 \frac{(r - r_o)}{2} \right) \log \ (r - r_o)^2 + \ldots. \right] \qquad (44)\text{-V}$$

Contrairement au pôle U = 0 la solution ψ_2 donne des champs électriques et magnétiques divergents (E_r et B_{1c}). Un problème se pose donc pour les solutions voisines des fréquences réelles : pour des solutions à ω complexe les solutions deviennent régulières mais on peut penser à une concentration de l'énergie des ondes au voisinage de ces couches.

5/ Solution dans le cas $\omega = 0$

Si l'on fait $\omega = 0$ dans l'équation 35 celle-ci se réduit à

$$0 = \frac{v_c}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{v^2} \frac{\partial}{\partial r} \psi + \left[\frac{v_c}{r^2} - \frac{\xi^2 \, v_c}{c^4 \, v^2} - Q \frac{\xi}{c^2} \right] \psi \qquad (45)\text{-V}$$

$$\text{or} \quad \frac{\xi}{c^2} = \frac{-4\pi J_o v_c}{B_o v_c} = -4\pi \frac{\overline{J}_o \times \overline{v}}{\overline{B}_o \times \overline{v}} = \frac{d\varphi_o}{dr}\left(\frac{d\psi_o}{dr}\right)^{-1} = \frac{d\varphi_o}{d\psi_o}$$

φ_o et ψ_o étant les valeurs de φ et ψ donnant les champs à l'équilibre.

L'équation (45) n'est autre que l'équation des équilibres voisins [12] dans le cas où la pression est constante (force-free).

L'équation (31) se réduit dans ce cas à

$$\varphi = \frac{\xi}{c^2}\psi \quad \text{soit} \quad \boxed{\varphi = \frac{d\varphi_o}{d\psi_o}\psi} \qquad (46)\text{-V}$$

relation qui n'est autre que la conservation de la dépendance fonctionnelle $\varphi_o(\psi)$.

6/ Solution dans le cas où $\omega \geqslant \omega_{ci}$

Dans ce cas l'équation n'a plus aucun pôle donnant des solutions irrégulières. Les solutions sont alors relativement faciles à obtenir en utilisant les propriétés des équations de Sturm-Liouville.

7/ Surface de réflexion

D'une manière générale l'équation donnant le champ électrique peut être mise sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial r} F \frac{\partial}{\partial r} \psi + G\psi = 0 \qquad (47)\text{-V}$$

en dehors des zéros et pôles de F on peut poser :

$$F\frac{\partial}{\partial r} = \frac{d}{dx} \quad \text{soit} \quad x = \int_{r_1}^{r} \frac{dr^1}{F(r^1)}$$

ce qui définit un changement de variable ; avec cette nouvelle variable on peut écrire l'équation sous la forme :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (FG)\psi = 0 \qquad (48)\text{-V}$$

les zéros de G définiront en général un changement de signe du produit (F G). Lorsque (F G) < 0 on a une zone évanescente (solution du type exponentielle pour ψ).

Lorsque (F G) > 0 la zone sera propagative (solutions du type oscillant pour ψ) Le rayon où G = 0 marquera en général une transition entre une zone propagative et une zone évanescente.

Si la zone évanescente est suffisante on aura une reflexion totale de l'onde, si non une partie de l'onde franchira cette zone (effet tunnel).

D'une manière générale lorsque F G variera peu, on pourra utiliser pour la résolution de cette équation différentielle la méthode d'approximation B K W qui donne comme solutions pour ψ

$$\boxed{\psi \simeq \psi_o |FG|^{-\frac{1}{4}} e^{\pm i\int_{r_o}^{r} \sqrt{\frac{G}{F}}\, dr^1}} \qquad (45)\text{-V}$$

E - CAS DES ONDES CROISSANTES, RESONANCES COLLECTIVES

Dans le cas des ondes à fréquence complexe on vérifiera d'abord que les ondes sont toujours réelles ; en effet si ψ est solution de l'équation 35 pour des valeurs ω et $\overline{v}$ (m et k), ψ^* est aussi solution de cette équation pour $-\omega^*$ et $(-\overline{v})$ $(-m, -k)$

Donc

$$\psi\, e^{i(\omega t + m\theta + kz)} + \psi^*\, e^{-i(\omega^* t + m\theta + kz)}$$

représentant une onde réelle est solution des équations. Lorsque la fréquence est complexe les quatre pôles rencontrés précédemment se comportent différemment :

Les pôles $r = 0$ et $v_c = 0$ ne sont pas affectés par la présence d'une partie imaginaire dans . . ils ne posent en outre aucun problème de franchissement : l'axe n'est jamais franchi et pour $v_c = 0$ les solutions sont régulières.

Par contre les pôles $I = 0$ et $U = 0$ qui dépentent explicitement de la fréquence disparaissent et les solutions de l'équation 35 deviennent régulières : lorsque la partie imaginaire de ω est petite nous pouvons ainsi obtenir les conditions de franchissement des pôles ; Ce franchissement des pôles se traduira par une discontinuité du coefficient de la petite solution, discontinuité qui correspondra à une absorption ou à une émission localisée du plasma, phénomène qui peut être considéré comme une résonance collective.

Pour obtenir une condition de franchissement unique on considérera toujours des ondes croissantes ce qui est justifié, soit par l'utilisation de la transformation de Laplace, soit par la recherche de modes instables (analogie avec l'effet Landau). On peut aussi introduire une légère résistivité du plasma, en retranchant des champs électriques agissant sur les particules un terme $\frac{J}{\sigma}$, correspondant à une friction entre les 2 espèces (résistivité) (σ correspond à une conductibilité).

Les équations (10) et (11) peuvent alors s'écrirent dans ce dernier cas :

$$4\pi i \quad J_b c^2 = \sum_j \frac{\omega_{P_j}^2}{\omega_j} \left(E_b - \frac{J_b}{\sigma}\right) + \sum 4\pi \frac{n_{j_1}}{n_o} \; i c^2 \qquad \text{(10bis)-V}$$

$$4\pi i \quad J_r c^2 = \sum_j \left[\frac{\omega_{P_j}^2 \; \omega_j}{\omega_j^2 - \omega_{c_j}^2} \left(E_r - \frac{1}{\sigma} J_r + V_j B_c\right) + \frac{i \, \omega_{c_j} \, \omega_{P_j}^2}{\omega_j^2 - \omega_{c_j}^2} \left(E_c - \frac{J_c}{\sigma} - B_r V_j\right) \right]$$

$$4\pi i \quad J_c c^2 = \sum_j \left[\frac{\omega_{P_j}^2 \; \omega_j}{\omega_j^2 - \omega_{c_j}^2} \left(E_c - \frac{1}{\sigma} J_c - B_r V_j\right) - \frac{i \, \omega_{P_j}^2 \; \omega_{c_j}}{\omega_j^2 - \omega_{c_j}^2} \left(E_r - \frac{J_r}{\sigma} + V_j B_c\right) \right] \qquad \text{(11bis)-V}$$

équations qui se réduisent à

$$E_b - \frac{J}{\sigma} \simeq 0 \qquad \text{(14bis)-V}$$

$$(\nabla \times B)_r \, c^2 \, i = - \alpha_1 E_r + i \left[\beta_1 E_c - \xi_1 B_r\right]$$

$$(\nabla \times B)_c \, c^2 \, i = - \alpha_1 E_c - i \left[\beta_1 E_r + \xi_1 B_c\right]$$

avec

$$\alpha_1 = \frac{\alpha + i \, (\alpha^2 - \beta^2) \, \eta}{(1 + i\alpha\eta)^2 + \beta^2 \eta^2} \qquad \eta = \frac{1}{4\pi c^2 \sigma \omega}$$

$$\beta_1 = \frac{\beta}{(1 + i\alpha\eta)^2 + \beta^2 \eta^2} \qquad \text{(28bis)-V}$$

$$\xi_1 = \frac{\xi}{(1 + i\alpha\eta)^2 + \beta^2 \eta^2}$$

On retrouve une équation analogue à l'équation 35 dans la limite où l'équation (14 bis) peut être représentée par l'équation 14 : $E_b = 0$. C'est-à-dire si l'épaisseur de peau est beaucoup plus petite que la longueur d'onde :

$$4\pi\sigma \; |\omega| \gg k_r^2 + \frac{v^2}{r^2}$$

Pour tenir compte de la résistivité il suffit de remplacer dans toutes les équations α, β et ξ par α_1, β_1 et ξ_1 ; en particulier les pôles $I = 0$ et $U = 0$ n'existent plus pour des valeurs réelles de ω.

En effet,

$$I_1 = \frac{v_c^2 \, c^2}{r^2} - \alpha_1 \simeq \frac{v_c^2 \, c^2}{r^2} - \alpha + i \, (\alpha^2 + \beta^2) \; 4\pi c^2 \sigma \omega \qquad \text{(29bis)-V}$$

ceci est à comparer à la valeur que prend I pour une onde légèrement croissante

$$I = I(\omega_o) - \frac{\partial I}{\partial \omega} i\gamma = I(\omega_o) + i \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} \gamma$$

or

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \omega} = 2\omega \frac{\omega_{P_i}^2 \omega_{c_i}^2}{(\omega_{c_i}^2 - \omega^2)^2}$$

soit

$$I = I(\omega_o) + i \frac{2\omega^2 \omega_{P_i}^2 \omega_{c_i}^2}{(\omega_{c_i}^2 - \omega^2)^2} \frac{\gamma}{\omega} \qquad (30\text{bis})\text{-V}$$

la comparaison des formules 29 bis et 30 bis revient par identification à écrire

$$\gamma = \frac{1}{8\pi c^2 \sigma} \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\omega_{c_i}^2 - \omega^2)}{\alpha \omega_{ci}} \text{ avec } \alpha > 0 \qquad (31\text{bis})\text{-V}$$

ce qui montre bien l'analogie entre une petite résistivité et une onde légèrement croissante pour l'étude des pôles.

1/ Etude détaillée du franchissement des pôles I et U

Nous avons déjà vu que dans le cas du pôle U, au voisinage de $U(\omega_o, r_o) = 0$ l'équation peut s'écrire

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{U'}{U}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \mathcal{A}\ \psi\right) + \mathcal{B}\,\psi + \mathcal{C}\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \qquad (37)\text{-V}$$

les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ $\mathcal{C}$ étant constants. Dans le cas du pôle I $(\omega_o, r_o) = 0$,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{I'}{I}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \mathcal{A}_1\,\psi\right) + \ldots\ldots = 0 \qquad (42)\text{-V}$$

Si maintenant ω est complexe on peut poser $\omega = \omega_o - i\gamma$ avec $\gamma > 0$ (onde croissante), ω_o représentant la partie réelle de ω ; on supposera de plus $\gamma \ll \omega_o$.

Dans ces conditions :

$$U(\omega, r) \simeq + \frac{\partial U_o}{\partial r}(r - r_o) - \frac{\partial U_o}{\partial \omega_o} i\gamma$$

ou

$$I(\omega, r) \simeq + \frac{\partial I_o}{\partial r}(r - r_o) - i\gamma \frac{\partial I_o}{\partial \omega_o}$$

les équations (37) et (42) s'écrivent alors respectivement, avec $\frac{\partial U_o}{\partial r} \neq 0$, $\frac{\partial U_o}{\partial \omega_o} \neq 0$:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{(r - r_o) - i\gamma \left(\frac{\partial U_o}{\partial \omega}\right)\left(\frac{\partial U_o}{\partial r}\right)^{-1}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \mathcal{A}\psi\right) + \mathcal{B}\,\psi + \mathcal{C}\frac{\partial \psi}{\partial r} \simeq 0 \qquad (50)\text{-V}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{(r - r_o) - i\gamma \left(\frac{\partial I_o}{\partial \omega}\right)\left(\frac{\partial I}{\partial r}\right)^{-1}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \mathcal{A}_1\psi\right) \simeq 0 \qquad (51)\text{-V}$$

En posant

$$z = (r - r_o) - i\gamma \left(\frac{\frac{\partial U_o}{\partial \omega}}{\frac{\partial U_o}{\partial r}}\right) \qquad (52)\text{-V}$$

$$z = (r - r_o) - i\gamma \left(\frac{\frac{\partial I_o}{\partial \omega}}{\frac{\partial I_o}{\partial r}} \right) \qquad (52bis)$$

les solutions de Ψ au voisinage de $r = r_o$ sont de la forme

$$U(\omega_o, r_o) = 0 \begin{cases} \psi_1 = \psi_{1_o} z^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \equiv \psi_{1_o} \text{ (PS)} \\ \psi_2 = \psi_{2_o} \left[1 + \alpha z - \frac{\alpha^2 + \beta + \epsilon\alpha}{2} z^2 \log z + \theta(z^3 \log z) \right] \end{cases} \qquad (53)\text{-V}$$

$$\equiv \psi_{2_o} \text{ [GS]}$$

$$I(\omega_o, r_o) = 0 \begin{cases} \psi_1 = \psi_{1_o} \text{ [(1 + } \alpha_1 z) \ldots\ldots\ldots] \equiv \psi_{1_o} \text{ [PS]} \\ \psi_2 = \psi_{2_o} \text{ [(1 + } \alpha_1 z) \text{ Log z. + } \theta(z^2 \text{ Log. z})] \equiv \psi_{2_o} \text{ [GS]} \end{cases} \qquad (54)\text{-V}$$

avec

$$|z|^2 \geq \gamma^2 \left(\frac{\partial U_o}{\partial \omega} \right)^2 \left(\frac{\partial U_o}{\partial r} \right)^{-2} \quad \text{ou} \quad \gamma^2 \left(\frac{\partial I_o}{\partial \omega} \right)^2 \left(\frac{\partial I_o}{\partial r} \right)^2$$

Si l'on pose

$$z = \rho e^{i\theta}, \qquad \text{Log } z = \text{Log } \rho + i\theta$$

on peut en déduire les règles de raccordement lorsque r croît par le schéma suivant:

$U = 0$	$\psi = \psi_{1_o}$ [P.S $(r - r_o)$] + ψ_{2_o} [G.S $(r - r_o)$]	$\psi = \left[\psi_{1_o} + i\pi\varepsilon \frac{\alpha^2 + \beta + \epsilon\alpha}{2} (-\psi_{2_o}) \right]$ [P.S $(r - r_o)$] + ψ_{2_o} [G.S $(r - r_o)$]
$I = 0$	$\psi = \psi_{1_o}$ [P.S $(r - r_o)$] + ψ_{2_o} [G.S $(r - r_o)$]	$\psi = (\psi_{1_o} + i\pi\varepsilon\psi_{2_o})$ [P.S $(r - r_o)$] + ψ_{2_o} [G.S $(r - r_o)$]

ε étant le signe du produit

$$\frac{\partial U_o}{\partial \omega} \quad \frac{\partial U_o}{\partial r}$$

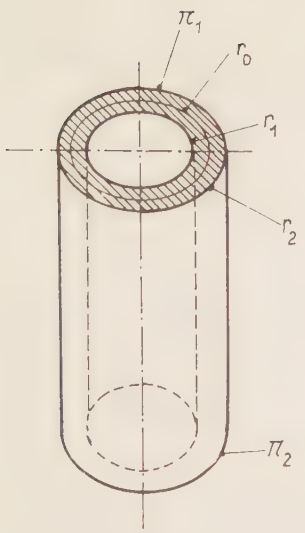
dans le premier cas ou le signe de

$$\frac{\partial I_o}{\partial \omega} \quad \frac{\partial I_o}{\partial r} \quad \text{dans le second}$$

On remarquera que U et I sont pairs en ω et que le signe de ε change quand ω devient $-\omega^*$.

L'ensemble des 2 solutions deviennent bien conjuguées lorsque l'on prend les solutions conjuguées d'un côté des pôles ; les solutions considérées sont bien des solutions réelles.

Pour connaître la nature absorbante ou émissive du pôle on calculera le flux du vecteur de Poynting de part et d'autre de la couche absorbante. Un traitement analogue a déjà été utilisé pour les plasma [13]. Pour cela il ne sera utile de calculer que la composante radiale de ce vecteur : en effet la surface à travers laquelle on calculera le flux est une surface formée de deux cylindres, situés à des rayons r_1 et r_2 encadrant le pôle, coupés par deux plans perpendiculaires à l'axe π_1 et π_2 (fig. 1).



La distance entre ces plans est la longueur d'onde longitudinale. Il s'ensuit que les flux à travers les plans π_1 et π_2 s'annulent par périodicité, seul les flux à travers les deux cylindres pourront donner une contribution non nulle. Pour plus de simplicité le calcul sera fait pour une fréquence purement réelle ω, le terme γ des équations représentant une résistivité du milieu.

2/ Calcul du vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting est défini par

$$\overline{P}_o = \frac{1}{4\pi} (\overline{E}_p \times \overline{B}_p)$$

$\overline{E}_p$ et $\overline{B}_p$ étant les champs électriques et magnétiques d'une onde réelle :

La composante radiale de $\overline{P}_o$ est donc

$$P_{o_r} = \frac{- E_{c\,p} B_{b_p}}{4\pi} \qquad (57)\text{-V}$$

l'indice p signifiant que E_{cp}, B_{br} sont les composantes d'une onde physique ; en décomposant le champ électrique et magnétique en ondes élémentaires on a :

$$E_{c_p} = \frac{1}{2}\left[E_c\, e^{i(kz + m\theta + \omega t)} + E_c^*\, e^{-i(kz + m\theta + \omega t)} \right]$$

$$B_{b_p} = \frac{1}{2}\left[B_b\, e^{i(kz + m\theta + \omega t)} + B_b^*\, e^{-i(kz + m\theta + \omega t)} \right]$$

E_c et B_b étant solution des équations (15) et (35), * indiquant la valeur conjuguées dans le plan complexe.

La composante radiale du vecteur de Poynting devient alors, en prenant sa valeur moyenne sur une période ($\omega_o \neq 0$) :

$$P_o\, r = - \frac{1}{16\pi} [E_c\, B_b^* + E_c^*\, B_b] \qquad (58)\text{-V}$$

or

$$B_b = \frac{v_b}{v^2} \varphi + \frac{v_c}{v^2} \frac{\partial}{\partial r} \psi$$

soit en utilisant les diverses notations

$$B_b = \frac{1}{v_c} \frac{I}{U} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \alpha\, \psi \right) + \alpha \psi \frac{v_c}{v^2}$$

$$E_c = \frac{i\, \omega\, \psi}{v_c}$$

ce qui donne pour le vecteur de Poynting

$$P_{o_r} = \frac{- i\, \omega}{16\, \pi} \left\{ \frac{1}{v_c^2}\, \psi \left[\frac{I}{U} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \alpha\, \psi \right) \right]^* + \frac{1}{v^2}\, \psi\, \psi^*\, \alpha^* - \text{complexe conj.} \right\} \qquad (59)\text{-V}$$

On peut remarquer d'abord que le flux du vecteur de Poynting est nul au premier ordre en γ dans tout volume ne contenant pas de pôle, cela est une conséquence directe de l'hermiticité des équations en γ à l'ordre 0 en dehors des pôles :

En effet

$$\frac{\Psi}{2\pi} = r_2\, P_{o_r}\, (r_2) - r_1\, P_{o_r}\, (r_1) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{d}{dr} (r\, P_{o_r})\, dr \qquad (60)\text{-V}$$

or, $\mathcal{P}$ étant le flux d'énergie par unité de longueur,

$$\frac{dr\,P_{o_r}}{dr} \equiv \frac{-i\omega}{16\pi}\left[\psi\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{I}{Uv_c^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^* + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\psi^*}{\partial r}\right)\left(\frac{Ir}{Uv_c^2}\right) + \frac{\partial}{\partial r}(\psi\psi^*)\left(\frac{r}{v^2} - \frac{Ir}{Uv_c^2}\alpha\right) + \psi\psi^*\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{v^2} - \frac{Ir}{Uv_c^2}\alpha\right)^* - \text{comp.conj.}\right]$$

Or l'équation (35) est de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{rI}{Uv_c^2}\frac{\partial\psi}{\partial r} = \Lambda\psi$$

c'est-à-dire que

$$\frac{dr\,P_{o_r}}{dr} = \frac{\omega}{16\pi}\left[\psi\,\psi^*\left(\frac{\Lambda_1^* - \Lambda_1}{i}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\psi^*}{\partial r}\left(\frac{\Lambda_2^* - \Lambda_2}{i}\right) + \frac{\partial}{\partial r}(\psi\,\psi^*)\left(\frac{\Lambda_3^* - \Lambda_3}{i}\right)\right] \qquad (61)\text{-V}$$

Λ_1, Λ_2 et Λ_3 étant des fonctions de ω et de r réelles dans la limite ou $\gamma = 0$ on déduit que lorsque ces trois coefficients sont réguliers ainsi que ψ (en dehors des pôles) :

$$\frac{dr\,P_{o_r}}{dr} \sim \gamma \qquad (62)\text{-V}$$

Cela signifie que, à l'ordre 0 en γ, $\Psi = 0$: il n'y a pas d'absorption anormale de l'onde : la seule absorption est due à l'effet normal de la résistivité et est proportionnelle à celle-ci ($\Psi \sim \gamma$).

Lorsqu'il existe des pôles les conclusions ne peuvent plus être les mêmes et nous verrons que nous avons une discontinuité de la composante radiale du vecteur de Poynting au passage des pôles U et I ; pour cela on utilisera l'équation (59) et l'on remplacera ψ par les solutions obtenues au voisinage de ces pôles :

a) Cas du pôle U :

On calculera donc à l'ordre 0 P_r (indice 0) au voisinage de $r = r_o$

$$\psi \simeq \psi_{2_o}, \quad U = \frac{\partial U}{\partial r} z$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} \simeq \alpha\,\psi_{2_o}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r} \simeq -\,\psi_{2_o}\,[(\alpha^2 + \mathcal{B} + \mathcal{C}\alpha)\,\text{Log}\,(z) + \mathcal{B}]$$

donc

$$P_{o_{r_o}} = \frac{-\omega I}{16\pi v_c^2\frac{\partial U}{\partial r}}\psi_{2_o}\,\psi_{2_o}^*\,(\alpha^2 + \mathcal{B} + \mathcal{C}\alpha)\left(\frac{\text{Log}\,z^* - \text{Log}\,z}{i}\right)$$

soit

$$P_{o_{r_o}} = \frac{-\omega I}{8\pi v_c^2\frac{\partial U}{\partial r}}\psi_{2_o}\,\psi_{2_o}^*\,(\alpha^2 + \mathcal{B} + \mathcal{C}\alpha)\,\text{Arctg}\,\frac{\frac{\partial U}{\partial\omega}\gamma}{\frac{\partial U}{\partial r}(r - r_o)}$$

$$\omega\frac{\partial I}{\partial\omega} = \omega\frac{\partial U}{\partial\omega} < 0 \qquad I \sim -\frac{v_b^2 c^2}{r^2}$$

On déduit donc pour le flux du vecteur de Poynting Ψ_o

$$\frac{\Psi_o}{2\pi r_o} = \frac{-v_b^2 c^2 |\omega|}{8 v_c^2 r_o^2\left|\frac{\partial U}{\partial r}\right|}\psi_{2_o}\,\psi_{2_o}^*\,(\alpha^2 + \mathcal{B} + \mathcal{C}\alpha) \qquad (63)\text{-V}$$

Or d'après la définition de Ψ, si $\Psi < 0$ l'énergie rentre dans le volume, en d'autres termes, on a

si $(\alpha^2 + \mathcal{B} + \mathcal{C}\alpha) > 0$ absorption

si $(\alpha^2 + \mathcal{B} + \mathcal{C}\alpha) < 0$ émission

b) Cas du pôle I

Le même raisonnement donne pour le pôle I

$$\Psi_o = -\frac{2\pi r_o}{8} \frac{|\omega| \left| \frac{\partial I}{\partial r} \right| r_o^2}{v_b^2 v_c^2 c^2} \psi_{2_o} \psi_{2_o}^* \qquad (64)\text{-V}$$

ce qui conduit à une absorption pour le pôle I, Ψ_o étant toujours négatif (les diverses fonctions entrant dans Ψ_o sont prises au rayon r_o).

F - CONCLUSIONS

Nous venons de voir que même dans un plasma froid il y avait des effets résonnants dus à l'inhomogénéité correspondant à des effets de "plage magnétique"; ces effets résonnants (pôles des relations de dispersion) conduisent à une absorption d'énergie (cas du pôle I = 0) de la part de la couche résonnante ou peut-être à une émission dans certaines conditions (pôle U = 0). On peut comparer ces résultats à ceux obtenus avec une distribution dans l'espace des vitesses : l'effet Landau se présente sous un aspect mathématique analogue. On peut penser que ces divers effets interviennent lors du chauffage d'un plasma par une onde électromagnétique.

Modes propres-Stabilité

La stabilité est liée à la recherche des modes propres du système en présence de parois conductrices. Lorsqu'il n'y aura pas de pôle les valeurs propres de l'opérateur seront réelles et il n'y aura pas de difficultés pour calculer les valeurs approchées des valeurs propres. Ecrire que la valeur propre est nulle est équivalent à une relation de dispersion: en effet les valeurs propres sont des fonctions de ω, m, k et de la position des parois conductrices. On se trouvera alors dans le cas où la relation de dispersion est réelle et l'on pourra appliquer les résultats déjà obtenus sur les relations de dispersion.

Dans le cas où il existe des pôles nous venons de voir qu'il sera en général impossible de satisfaire les conditions aux limites avec des fréquences réelles (émission ou absorption) dans ce cas l'opérateur aura en général des valeurs propres complexes et la relation de dispersion sera complexe correspondant à un opérateur non hermitique : les limites de stabilité seront données par la recherche des ondes ni amplifiées ni absorbées. Cette recherche sera facilitée dans le cas d'un seul pôle : on a vu en effet que les petites solutions jouissaient de cette propriété.

Une étude plus détaillée de la stabilité sera faite ultérieurement en se basant sur le vecteur de Poynting.

Mais on peut déjà concevoir des conditions telles que l'absence de couche émissive etc.

VI - LISTE DES SYMBOLES UTILISÉS

a rayon de Larmor, a_n coefficient de la série de Fourier sur les rayons
A $\overline{A}$, A_θ, A_z, A_r : Potentiel magnétique et composantes. A_n coeff. du taux d'harmonique sur l'énergie absorbée par particule (11)-IV.
b indice d'une composante parallèle au champ magnétique
$\overline{B}$ champ magnétique
c vitesse de la lumière-indice d'une composante d'un vecteur $\perp$ à $\overline{B}_o$ et au rayon vecteur
d opérateur dérivée totale
D variation autour d'une grandeur moyenne lors du mouvement particulaire (19)-II.
$\overline{e}$ vecteur unitaire - e, indice pour l'assemblée électronique
$\overline{E}$ champ électrique
$\mathscr{E}$ énergie d'un milieu
f fonction de distribution (1)-II.
$\overline{F}$ force agissant sur une particule
$\mathscr{f}$ partie d'une fonction de distribution perturbée
g partie d'une fonction de distribution ou grandeur macroscopique
G fonction de distribution particulière ou grandeur macroscopique
H hamiltonien ou énergie d'une particule (2)-II.
i $\sqrt{-1}$ ou en indice espèce ionique
I pôle (position d'une couche résonante) (36 bis)-V.
j indice libre
$\overline{J}$ courant électrique J_o, J_n fonction de Bessel
$\overline{k}$ vecteur propagation
K constante de Boltzman
L opérateur ou longueur caractéristique de rotation du champ magnétique
m (entier) mode en θ
M masse de la particule
n (entier) numéro de l'harmonique cyclotronique, n_j densité
N point de l'espace des phases (59)
o indice (initial, non perturbé, etc.)
p indice (partie réelle ou grandeur perturbée)
$\overline{P}$ moment d'une particule - P_u puissance-P_o vecteur de Poynting
q charge de la particule
Q opérateur (18)-V
r rayon
R rayon de la paroi
s variable intermédiaire d'intégration
S opérateur (19)-V
t temps
T Intégrale première sur le temps - T_e, T_i températures électronique et ionique (15)-II
$\mathscr{C}$ à côté d'un signe $\int$ indice une intégration le long de la trajectoire de la particule
U pôle (couche résonante) (30)-V
$\overline{v}$ vecteur dans la surface d'onde et $\perp$ au vecteur radial (16)-V
$\overline{V}$ vitesse macroscopique d'une espèce
$\overline{w}$ vitesse d'une particule, w_D vitesse de dérive, w_M vitesse moyenne sur une période cyclotronique.
W composantes de la vitesse d'une particule (variable intermédiaire)
x variable réduite (calcul de l'équilibre)
X_n opérateur partiel du tenseur de conductivité

y variable réduite (calcul de l'équilibre)
variable intermédiaire

z coordonnée le long de l'axe de la géométrie cylindrique ou variable complexe intermédiaire

Z nombre de charges ou phase dans le mouvement longitudinal de la particule (15)-II

α indice partiel en plasma froid ou coefficient (28)-V

β " " " " " (28)-V

γ taux de croissance d'une onde

δ symbol de Kromecker ou fonction δ

∂ dérivée partielle

Δ opérateur signifiant une variation sous l'action d'un champ de forces perturbateur

ε partie d'une fonction de distribution

ζ fonction w_r^2 (13)-II

η grandeur de la dimension du carré d'un temps liée à la résistivité $\eta = \frac{1}{4\pi c^2 \sigma \omega}$

θ angle en coordonnées cylindriques

Θ intégrale première (phase initiale en θ) (15)-II

λ variable réduite : champ magnétique sur l'axe

Λ courant dans le conducteur central

χ indice partiel en plasma froid (28)-V

μ fréquence moyenne de collision, en indice coordonnée rotatoire axée sur le champ magnétique local

ν vitesse moyenne de la particule le long de l'axe ; en indice coordonnée rotatoire conjuguée de μ

ξ indice partiel (lié aux courants) (28)-V

π nombre π

Π énergie potentielle globale

ρ rayon réduit ou module dans le plan complexe

$\bar{\bar{\sigma}}$ tenseur de conductivité

Σ symbole somme

τ temps de collision ou temps réduit

φ phase du mouvement particulaire dans le cas des petits rayons de Larmor ou composante du champ magnétique perturbée dans le cas des plasmas froids (15)-V

Φ potentiel électrique

ϕ potentiel dont dérive une partie des composantes du champ magnétique perturbateur. (15)-V

Ψ flux du vecteur de Poynting

ω fréquence de l'onde, ω_c fréquence cyclotronique, ω_r fréquence de rotation autour de l'axe

ω_p fréquence plasma

Ω fréquence de rotation macroscopique d'une espèce

∇ opérateur gradient

VII - RÉFÉRENCES

[1] SPITZER L. - "Physics of fully ionized gases" Interscience Publishers Inc. New York 1956.

[2] PERES Joseph - Mécanique Générale-Masson et Cie.

[3] THONEMANN P.C., COWLIG W.T. - Proc. Phys. B 64, 354, 1951.

[4] BENNET W.M. - Phys. Rev 45, 899, 1934.

[5] TUCK J.T. - Conférence de Genève 1958 p. 1860 - U.S.A.

[6] COLGATE S.A. - Conférence de Genève p. 369 U.S.A.

[7] BERNSTEIN I.B. - Waves in a plasma in a magnetic field. Phys. Rev. 109, 10, 1958.

[8] REBUT P.H. - Instabilité non magnétohydrodynamique dans les plasmas à densité de courant élevé, J.N.E. part C 4 p. 159-168.

[9] MIKHAILOVSKAYA L.V. MIKHAILOVSKY A.B. - Kinetic method of investigation of oscillations and stability of inhomogeneous plasma in a helical magnetic field - Nuclear Fusion 3, 1963.

[10] STIX T. - The theory of plasma waves, Mc Graw Hill -Advanced Physics Monograph series.

[11] DELCROIX J.L. - Théorie des ondes dans les plasmas-Dunod-Paris 1961.

[12] COTSAFTIS, MERCIER, REBUT - Equilibres voisins et stabilité des plasmas cylindriques. J.N.E. 1963 5, 1-6.

[13] BUDDEN K.G. - The non existence of a "Fourth reflection condition" for the radio wawes in the lonosphere. Physics of the ionosphere : Report of Phys. Soc. Conf. Cavendish Lab" p. 380. Phy. Soc. London 1955.

[14] REBUT P.H. - Etude d'instabilités à partir de l'équation de Vlasov dans un plasma inhomogène en géométrie cylindrique. 2ème Confér. Inter. sur la Physique des Plasmas et recherches concernant la Fusion Nucléaire Contrôlée, Culham 1965.

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

"AMORÇAGE DE DECHARGES DANS LES GAZ PAR DES ONDES LUMINEUSES INTENSES"

Vu et approuvé :
Paris, le 13 décembre 1965
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
M. ZAMANSKY

Vu
et Permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie
de Paris,
J. ROCHE

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN
Ouvrages scientifiques
TYPO-OFFSET
GAP (Hautes-Alpes)
Dépôt légal n° 245
1966